Derivato di un vettore

Marcello Colozzo

Definizione 1 *Assegnata la funzione vettoriale* $\mathbf{u}(t)$ *definita nell'intervallo* $[t_1, t_2]$ *e un punto* t_0 *di tale intervallo, dicesi* **rapporto incrementale** *di* $\mathbf{u}(t)$ *relativo al punto* t_0*, il vettore*

$$\frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{u}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{u}(t_0)}{\Delta t}, \tag{1}$$

essendo Δt *l'incremento della variabile indipendente.*

Per un dato $t_0 \in [t_1, t_2]$ il rapporto incrementale è una funzione vettoriale della variabile reale Δt:

$$\begin{aligned} & t_0 \in (t_1, t_2) \text{ i.e. interno a } [t_1, t_2], \; \Delta t \in \mathbb{R} - \{0\} \mid t_1 - t_0 \leq \Delta t \leq t_2 - t_0 \\ & t_0 = t_1 \Longrightarrow 0 < \Delta t \leq t_2 - t_0 \\ & t_0 = t_2 \Longrightarrow t_1 - t_0 \leq \Delta t < 0 \end{aligned}$$

In ogni caso, il punto $\Delta t = 0$ è di accumulazione per l'insieme di definizione della funzione (1), per cui studiamo il comportamento di tale funzione in un intorno di $\Delta t = 0$.

Definizione 2 *Se il rapporto incrementale (1) è convergente per* $\Delta t \to 0$*, si dice che la funzione vettoriale* $\mathbf{u}(t)$ *è* **derivabile** *in* t_0*, e il corrispondente limite è la* **derivata** *di* $\mathbf{u}(t)$ *in* t_0*:*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{u}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{u}(t_0)}{\Delta t} = \mathbf{u}'(t_0) \tag{2}$$

Definizione 3 *Una funzione vettoriale* $\mathbf{u}(t)$ *derivabile in ogni punto di* $[t_1, t_2]$ *si dice* **derivabile** *in* $[t_1, t_2]$*.*

La derivabilità di una funzione vettoriale in un intervallo assegnato (limitato o illimitato) si traduce nell'esistenza di una nuova funzione definita nel predetto intervallo:

$$\mathbf{u}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t)}{\Delta t} \tag{3}$$

È consuetudine chiamare $\mathbf{u}'(t)$ **vettore derivato** o semplicemente, **derivato** del vettore $\mathbf{u}(t)$. Introducendo l'operatore di derivazione $D = \frac{d}{dt}$:

$$\mathbf{u}'(t) = D\mathbf{u}(t) \tag{4}$$

Stabiliamo ora la rappresentazione cartesiana del vettore derivato $\mathbf{u}'(t)$. Sia

$$\mathbf{u}(t) = u_x(t)\,\mathbf{i} + u_y(t)\,\mathbf{j} + u_z(t)\,\mathbf{k}$$

la rappresentazione cartesiana di $\mathbf{u}(t)$. Segue

$$\mathbf{u}'(t) = u'_x(t)\,\mathbf{i} + u'_y(t)\,\mathbf{j} + u'_z(t)\,\mathbf{k} \tag{5}$$

In fig. 1 è illustrata la determinazione dell'incremento $\Delta \mathbf{u}$.

Sussistono le seguenti regole di derivazione

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \pm \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \pm \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{6}$$

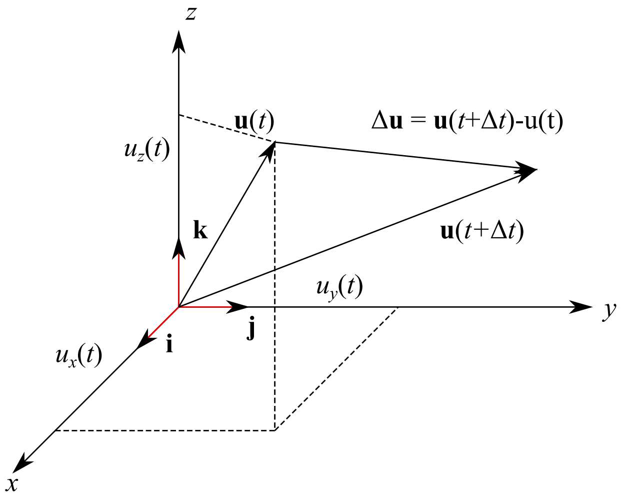

Figura 1: Determinazione dell'incremento $\Delta\mathbf{u}$ della funzione vettoriale $\mathbf{u}(t)$.

Se λ è un qualunque scalare costante:

$$\frac{d}{dt}(\lambda\mathbf{u}) = \lambda\frac{d\mathbf{u}}{dt} \tag{7}$$

Se $f(t)$ è una qualunque funzione scalare derivabile:

$$\frac{d}{dt}[f(t)\,\mathbf{u}(t)] = f'(t)\,\mathbf{u}(t) + f(t)\,\mathbf{u}'(t) \tag{8}$$

Per quanto riguarda il prodotto scalare e il prodotto vettoriale:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) &= \frac{d\mathbf{u}}{dt}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}) &= \frac{d\mathbf{u}}{dt}\wedge\mathbf{v} + \mathbf{u}\wedge\frac{d\mathbf{v}}{dt}\end{aligned} \tag{9}$$

Esercizio 4 *Provare le (6)-(7)-(8)-(9).*

Dalla prima delle (9) per $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ si ha:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt} = 2\mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt} \tag{10}$$

D'altra parte

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{u}| = u^2,$$

che si chiama *quadrato del vettore* $\mathbf{u}$. Quindi elevare al quadrato un vettore significa eseguire il prodotto scalare del vettore per se stesso:

$$\mathbf{u}^2 = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{u}| = u^2 \tag{11}$$

Dalla (10)

$$\frac{d\mathbf{u}^2}{dt} = 2\mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt} \tag{12}$$

Proposizione 5 *La derivata di un vettore di modulo costante o è il vettore nullo o è un vettore perpendicolare al vettore assegnato.*

Dimostrazione. Dalla (12):

$$0 = 2\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} \Longleftrightarrow \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0,$$

onde l'asserto. ■

In particolare, dalla (5):

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \frac{du_x}{dx} = \frac{du_y}{dy} = \frac{du_z}{dz} = 0$$

Cioè se e solo se $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{u}_0$ (vettore costante). Diversamente, il modulo è costante e il derivato è perpendicolare al vettore assegnato.

Esempio 6 *Sia*

$$\mathbf{u}(t) = (\sin t)\,\mathbf{i} + (\cos t)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Segue

$$|\mathbf{u}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

e

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = (\cos t)\,\mathbf{i} + (-\sin t)\,\mathbf{j}$$

Verifichiamo che tale vettore è ortogonale al vettore assegnato:

$$\mathbf{u}(t) \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \sin t \cos t - \cos t \sin t = 0$$

Si definiscono poi le derivate di ordine superiore:

$$\mathbf{u}''(t)\,,\ \mathbf{u}'''(t)\,, ..., \mathbf{u}^{(n)}(t) \tag{13}$$

Il *differenziale primo* o semplicemente *differenziale*

$$d\mathbf{u} = \mathbf{u}'(t)\,dt$$

La nota proprietà secondo cui l'incremento di una funzione scalare $f(t)$ differisce dal differenziale per un infinitesimo di ordine superiore all'incremento Δt, si estende immediatamente alle funzioni vettoriali:

$$\Delta u = d\mathbf{u} + \mathbf{o}(\Delta t)\,,$$

essendo $\mathbf{o}(\Delta t)$ un infinitesimo (per $\Delta t \to 0$) di ordine superiore rispetto a Δt.