Derivata della funzione gradino unitario

Marcello Colozzo
[http://www.extrabyte.info]

La *funzione gradino unitario* (*unit step* o *funzione di Heaviside*) è così definita[1]:

$$U(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

Tale funzione presenta una discontinuità di prima specie in $x_0 = 0$, in quanto:

$$\lim_{x \to 0^+} U(x) = 1, \quad \lim_{x \to 0^-} U(x) = 0, \tag{2}$$

con salto di discontinuità

$$s(0) = \lim_{x \to 0^+} U(x) - \lim_{x \to 0^-} U(x) = +1 \tag{3}$$

In fig. 1 riportiamo il grafico di $U(x)$.

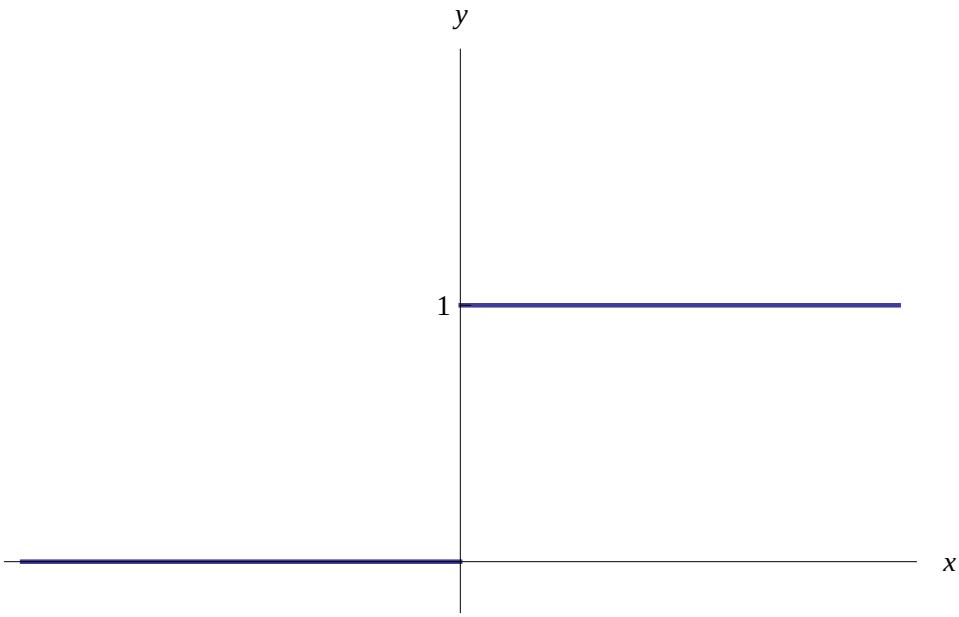

Figura 1: Grafico della funzione unit step (cfr. eq. (1))

Il rapporto incrementale di $U(x)$ relativo al punto $x_0 = 0$ è:

$$\left(\frac{\Delta U}{\Delta x}\right)_{x_0=0} = \frac{U(\Delta x) - U(0)}{\Delta x} = \frac{U(\Delta x) - 1}{\Delta x} = \begin{cases} 0, & \text{se } \Delta x > 0 \\ -\frac{1}{\Delta x}, & \text{se } \Delta x < 0 \end{cases}, \tag{4}$$

onde:

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \left(\frac{\Delta U}{\Delta x}\right)_{x_0=0} = 0, \quad \lim_{\Delta x \to 0^-} \left(\frac{\Delta U}{\Delta x}\right)_{x_0=0} = +\infty \tag{5}$$

Il rapporto incrementale (4) è graficato in fig. **??**.

D'altra parte:

$$U'(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Per quanto precede, $U(x)$ non è derivabile in $x_0 = 0$, avendosi dalle (5):

$$U'_+(0) = 0, \quad U'_-(0) = +\infty \tag{6}$$

[1] In realtà la funzione di Heaviside è $\theta(x > 0) = 1$, $\theta(x < 0) = 0$, per cui non è definita in $x = 0$. Ma con questa definizione non possiamo scrivere il rapporto incrementale relativo a tale punto.

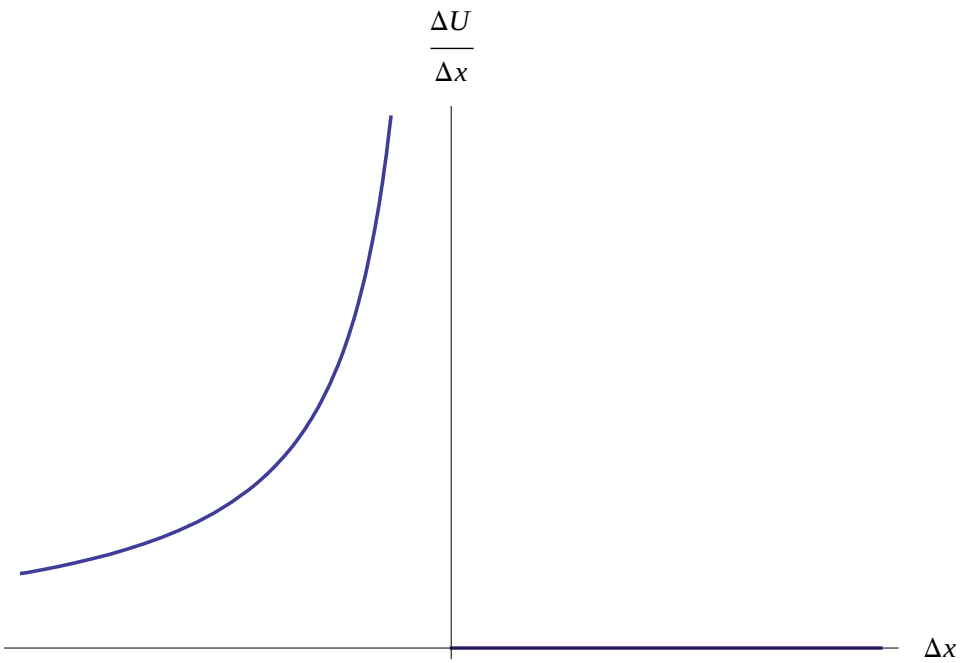

Figura 2: Grafico del rapporto incrementale della unitstep, relativo al punto $x_0 = 0$.

Le (6) sono intuitivamente ovvie, poichè il salto di discontinuità di $U(x)$ in $x_0 = 0$ è $+1$ (cfr. eq. 3). In altri termini, per $\Delta x \to 0^-$, la funzione "salta" da 0 a 1, per cui la derivata sinistra è $+\infty$. Viceversa, per $\Delta x \to 0^+$ la funzione è costantemente 1, onde la derivata destra è 0. Definiamo ora la funzione:

$$f_a(x) = \frac{1}{e^{-\frac{x}{a}} + 1}, \tag{7}$$

essendo a un parametro reale positivo. Al variare di a in $\mathbb{R}_0^+ = (0, +\infty)$, otteniamo l'insieme di funzioni:

$$\{f_a(x)\}_{a \in \mathbb{R}_0^+}$$

Studiamo la funzione (7) per un assegnato valore di a.

Insieme di definizione

La funzione è definita in $\mathbb{R}$.

Intersezione con gli assi coordinati

$$f_a(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{e^{-\frac{x}{a}} + 1} = 0 \underset{e^{-\frac{x}{a}}+1 \neq 0}{\Longleftrightarrow} 1 = 0 \quad \text{mai!}$$

Il grafico $\gamma_a : y = f_a(x)$ non interseca l'asse x.

$$f_a(0) = \frac{1}{2},$$

per cui γ_a interseca l'asse y in $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Studio del segno

$$f_a(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ne consegue che γ_a è contenuto nel semipiano $y > 0$.

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to +\infty} f_a(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{-\frac{|x|}{a}} + 1} \underset{a>0}{=} \frac{1}{e^{-\infty} + 1} = \frac{1}{0^+ + 1} = 1^-,$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{\frac{|x|}{a}}+1} = \frac{1}{e^{+\infty}+1} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

Cioè, la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale a destra per il grafico di $f_a(x)$, mentre $y = 0$ è asintoto orizzontale a sinistra.

Studio della derivata prima

$$f_a'(x) = \frac{e^{\frac{x}{a}}}{a\left(1+e^{\frac{x}{a}}\right)^2} \tag{8}$$

Risulta

$$f_a(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Pertanto $f_a(x)$ è strettamente crescente.

Tracciamento del grafico

Siamo ora in grado di tracciare la curva γ_a. Più specificatamente, le figg. 3-4 confrontano il grafico di $f_a(x)$ con quello di $U(x)$, per $a = 1$ e $a = 10^{-1}$ rispettivamente.

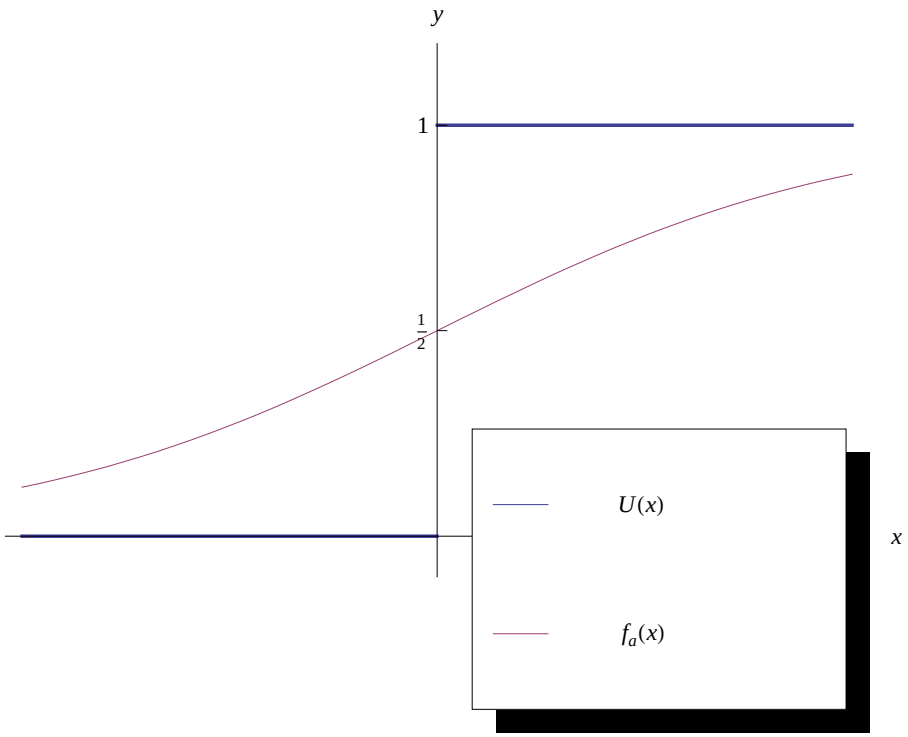

Figura 3: Confronto dei grafici di $U(x)$ e $f_a(x)$ per $a = 1$.

Da tali grafici vediamo che al decrescere progressivo di $a > 0$, il grafico γ_a "si avvicina" al grafico $\gamma_u : y = U(x)$. Ciò è confermato ulteriormente dalla fig. 5.

Per un assegnato $x \in \mathbb{R}$, eseguiamo l'operazione di passaggio al limite per $x \to 0^+$, distinguendo i due casi: $x > 0$ e $x < 0$.→

$$x > 0 \Longrightarrow \lim_{a\to0^+} f_a(x) = \lim_{a\to0^+} \frac{1}{e^{-\frac{|x|}{a}}+1} \underset{a>0}{=} \frac{1}{e^{-\infty}+1} = \frac{1}{0^+ + 1} = 1^- \tag{9}$$

$$x < 0 \Longrightarrow \lim_{a\to0^+} f_a(x) = \lim_{a\to0^+} \frac{1}{e^{\frac{|x|}{a}}+1} = \frac{1}{e^{+\infty}+1} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

Applicando la definizione di limite, le (9) implicano:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\Delta_\varepsilon > 0 \mid 0 < a < \Delta_\varepsilon \Longrightarrow |f_a(x) - 1| < \varepsilon, \quad \forall x \in (0, +\infty) \tag{10}$$

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\Delta'_\varepsilon > 0 \mid 0 < a < \Delta'_\varepsilon \Longrightarrow |f_a(x)| \underset{f_a(x)>0}{=} f_a(x) < \varepsilon, \quad \forall x \in (-\infty, 0)$$

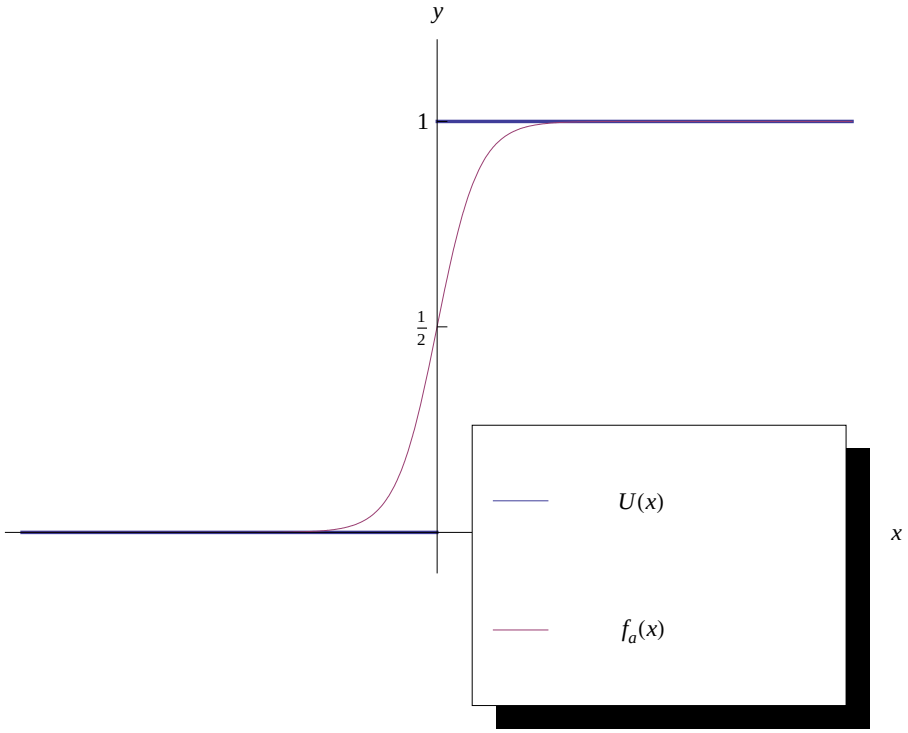

Figura 4: Confronto dei grafici di $U(x)$ e $f_a(x)$ per $a = 10^{-1}$.

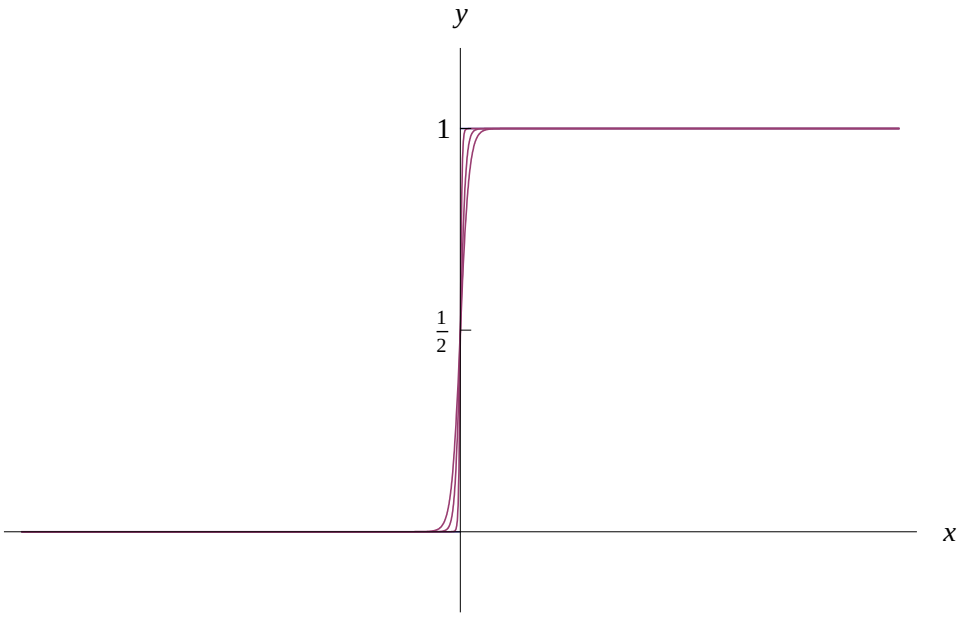

Figura 5: Grafico di $U(x)$ e $f_a(x)$ per a variabile da 10^{-2} a 10^{-4} con passo -4×10^{-3}.

A loro volta, le (10) implicano:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon = \min\{\Delta_\varepsilon, \Delta'_\varepsilon\} \mid 0 < a < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f_a(x) - U(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{11}$$

Cioè:

$$\lim_{a \to 0^+} f_a(x) = U(x) \tag{12}$$

A questo punto siamo tentati a scrivere:

$$\lim_{a \to 0^+} f_a(x) = U(x) \Longrightarrow \lim_{a \to 0^+} f'_a(x) = U'(x) \tag{13}$$

Ci proponiamo di esplicitare il primo membro del secondo termine dell'implicazione (13) per via grafica, confrontando cioè il grafico $\gamma'_a : y = f'_a(x)$ con γ_u. Non affronteremo lo studio della funzione (8), ma ci limitiamo a determinarne il comportamento agli estremi:

$$\lim_{x \to +\infty} f'_a(x) = \frac{1}{a} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-\frac{x}{a}}}{\left(1 + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2} \underset{a>0}{=} 0^+$$

Alla stessa maniera

$$\lim_{x \to -\infty} f'_a(x) = 0^+$$

Cioè $y = 0$ è asintoto orizzontale per γ'_a a sinistra e a destra. Chiediamo a *Mathematica* di tracciarne la curva γ'_a per valori decrescenti di $a > 0$. Ad esempio, per $a = 1$ otteniamo il grafico di fig. 6.

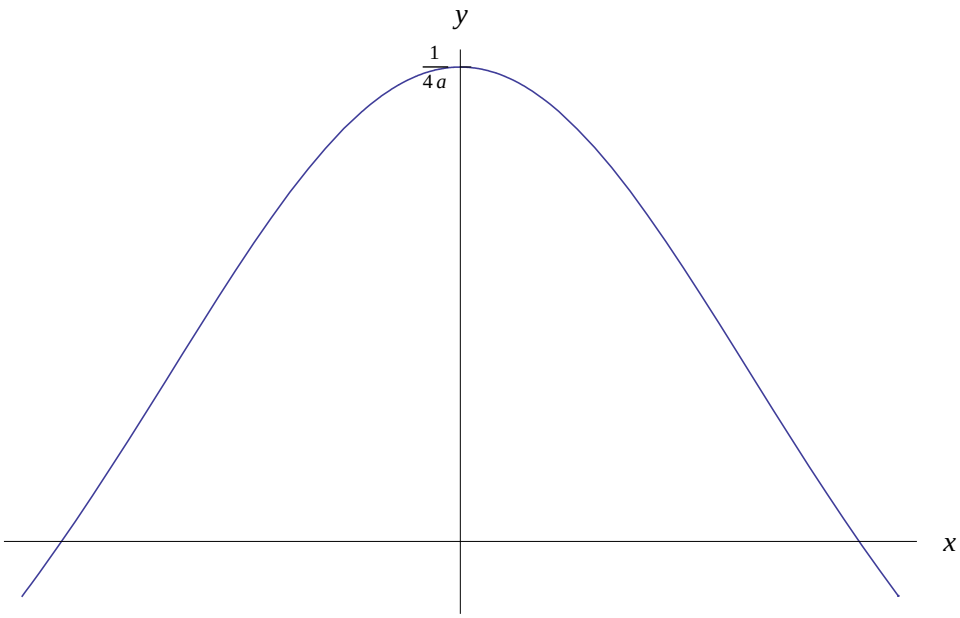

Figura 6: Grafico di $f'_a(x)$ per $a = 1$.

Qui vediamo che $f'_a(x)$ ha un punto di massimo assoluto in $x = 0$, risultando

$$f'_a(0) = \frac{1}{4a},$$

per cui:

$$\lim_{a \to 0^+} f'_a(0) = +\infty$$

Ad esempio, per $a = 10^{-1}$ si ottiene la curva riportata in fig. 7.

Per completezza, riportiamo in fig. 8i grafici delle funzioni $\theta(x)$, $f_a(x)$, $f'_a(x)$ per $a = 10^{-1}$, mentre la fig. 9 confronta i grafici delle stesse funzioni per $a = 10^{-2}$.

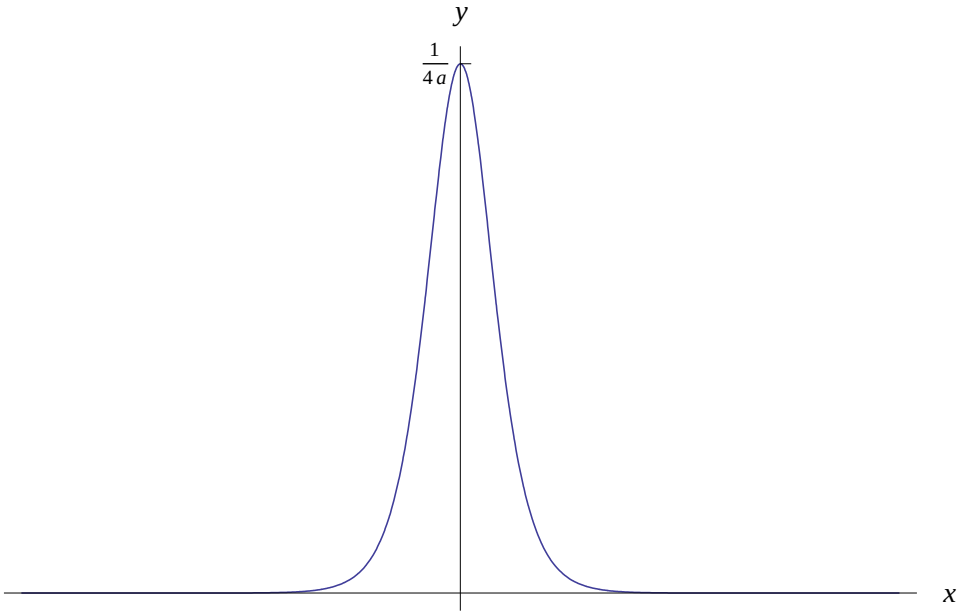

Figura 7: Grafico di $f'_a(x)$ per $a = 10^{-1}$.

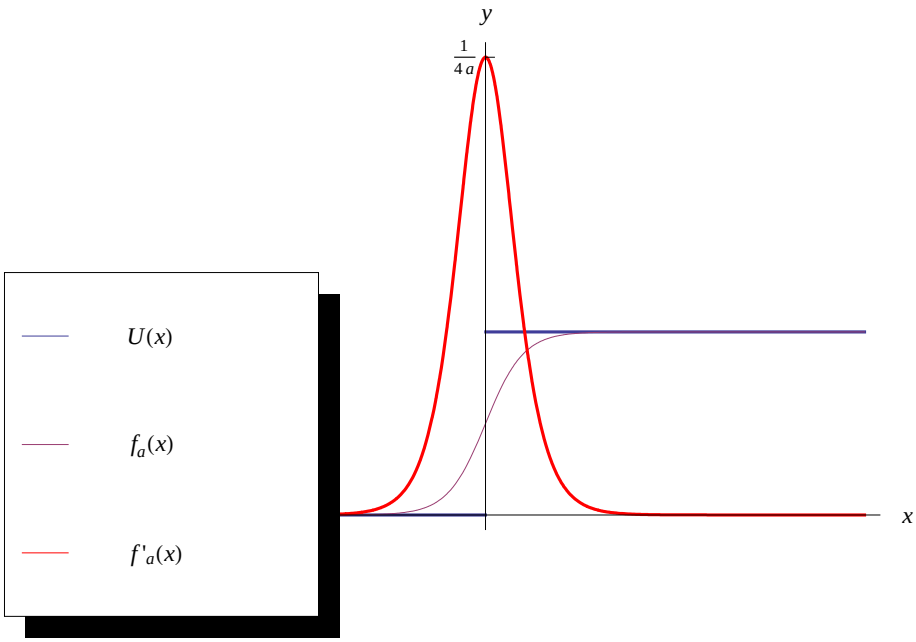

Figura 8: Grafico di $U(x)$, $f_{10^{-1}}(x)$ e $f'_{10^{-1}}(x)$.

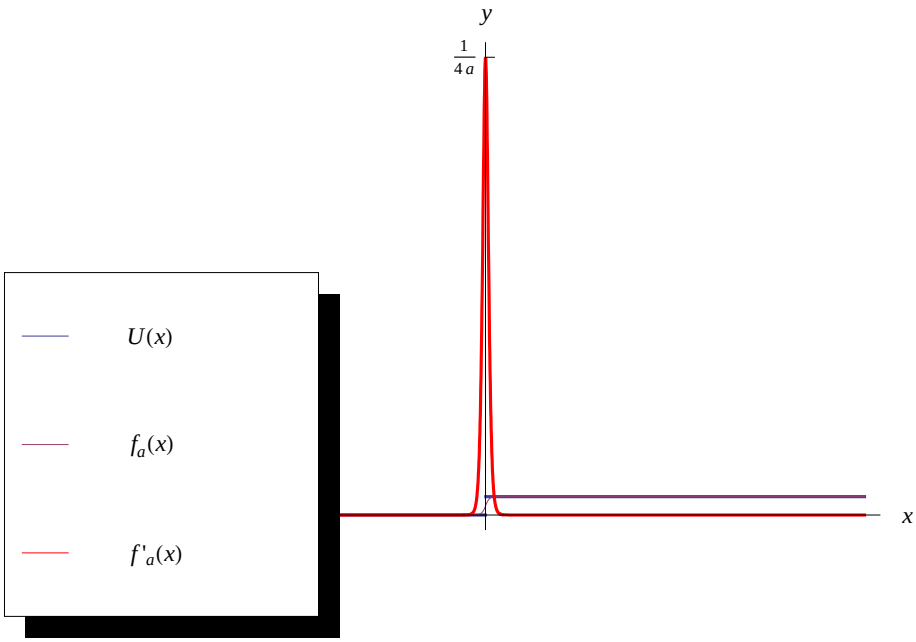

Figura 9: Grafico di $U(x)$, $f_{10^{-2}}(x)$ e $f'_{10^{-2}}(x)$.

Da tale analisi grafica segue:

$$\lim_{a\to 0^+} f'_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 0 \\ +\infty, & \text{se } x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{a\to 0^+} f'_a(x) = \delta(x),$$

dove $\delta(x)$ è la funzione *impulso unitario* (*delta di Dirac*). Ne consegue che

$$\frac{d}{dx}U(x) = \delta(x) \tag{14}$$

Proprietà 1 *La derivata della funzione gradino unitario è l'impulso unitario.*

Osserviamo che la (14) si generalizza:

$$\frac{d}{dx}U(x - x_0) = \delta(x - x_0),$$

essendo x_0 un assegnato numero reale.