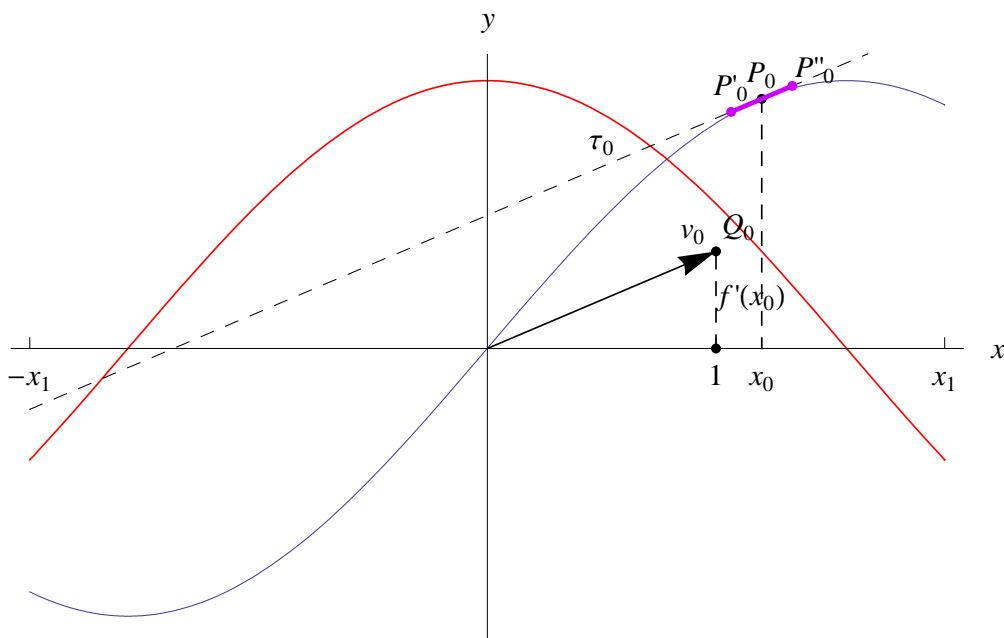


Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int f(x) dx = \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

Esperimenti computazionali con Mathematica (derivata di una funzione)

Marcello Colozzo



Indice

I	Derivazione di una funzione reale di una variabile reale	2
1	Limite del rapporto incrementale	3
1.1	Definizioni e proprietà	3
2	Interpretazione geometrica della derivata	8
2.1	La nozione di retta tangente al grafico di una funzione	8
3	Funzioni non derivabili	10
3.1	Rapporto incrementale non regolare	10
4	Interpretazione geometrica della derivata (parte seconda)	19
4.1	Punti di flesso a tangente verticale. Punti angolosi. Cuspidi	19
II	Applicazioni	26
5	La derivata nell'ambiente di calcolo <i>Mathematica</i>	27
5.1	Routine	27
6	Interpretazione cinematica dei punti di flesso a tangente verticale	31
6.1	Moto piano di una particella	31
7	Interpretazione cinematica dei punti cuspidali	38
7.1	Moto piano di una particella	38
8	Derivata di funzioni con discontinuità di prima specie. La funzione delta di Dirac	46
8.1	La derivata della funzione gradino unitario	46
8.2	La funzione di Heaviside e la funzione unit step	53
8.3	Moto piano in un campo di Heaviside	55
8.4	Un problema di Cauchy	59
8.5	Transitori circuitali: serie <i>RC</i>	60
9	Funzioni continue prive di derivata prima	65
9.1	Il pettine di Dirac	65

Parte I

Derivazione di una funzione reale di una variabile reale

Capitolo 1

Limite del rapporto incrementale

1.1 Definizioni e proprietà

Sia f una funzione reale di una variabile reale definita in un intervallo X :

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.1)$$

Assegnato $x_0 \in X$, sia Δx un *incremento* della variabile indipendente tale che $(x_0 + \Delta x) \in X$. Denotiamo, quindi, con Δf il corrispondente *incremento della funzione*:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad (1.2)$$

che per un assegnato x_0 è una funzione di Δx :

$$\begin{aligned} \Delta f : E_{x_0} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \Delta f : \Delta x &\rightarrow \Delta f(\Delta x), \quad \forall \Delta x \in E_{x_0}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

ove

$$E_{x_0} = \{\Delta x \in \mathbb{R} \mid (x_0 + \Delta x) \in X\},$$

riuscendo:

$$X \text{ è un intervallo} \implies E_{x_0} \neq \emptyset$$

La funzione $\Delta f(\Delta x)$ (eq. 1.3) è manifestamente un infinitesimo in $\Delta x = 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$$

Di maggior interesse è il *rapporto incrementale*:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad (1.4)$$

che è una funzione di Δx :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta x} : E'_{x_0} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \frac{\Delta f}{\Delta x} : \Delta x &\rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x}(\Delta x), \quad \forall \Delta x \in E'_{x_0}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

essendo $E'_{x_0} = E_{x_0} - \{\Delta x = 0\}$. Il punto $\Delta x = 0$ è di accumulazione per E'_{x_0} , onde ha senso studiare il comportamento della funzione (1.5) in un intorno di tale punto, ovvero eseguire l'operazione di passaggio al limite:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad (1.6)$$

Se tale limite esiste finito, cioè se la funzione $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ (eq. 1.5) è convergente in $\Delta x = 0$, si dice che la funzione f è *derivabile* in x_0 e il limite (1.6) si denota con $f'(x_0)$:

$$f \text{ è derivabile in } x_0 \iff \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

Se tale circostanza si verifica in *ogni* punto di X , diremo che la funzione f è derivabile in X . Tale operazione dà luogo a una nuova funzione che denotiamo con $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

che si chiama *derivata prima* di f . Oltre alla notazione apicale (o di Lagrange) è spesso utilizzata la notazione differenziale (o di Leibnitz):

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Esempio 1 Determiniamo la derivata di $\sin x$ in $x_0 \in \mathbb{R}$.

Svolgimento

Dobbiamo calcolare il limite:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x},$$

che chiaramente si presenta sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per rimuovere l'indeterminazione sviluppiamo il numeratore con le formule di prostaferesi:

$$\begin{aligned} \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 &= 2 \sin\left(\frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2}\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right), \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\left[\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \right]}_{=1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \\ &= \cos x_0 \end{aligned}$$

E per ogni $x_0 \equiv x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

È istruttivo confrontare per via grafica il rapporto incrementale $\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$ con la funzione $\cos x$. Più precisamente, consideriamo la funzione di x :

$$g_{\Delta x}(x) = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}, \tag{1.7}$$

per assegnati valori di Δx . In altri termini, nella (1.7) assumiamo Δx come parametro reale non nullo. Ad esempio, per $\Delta x = 4$ otteniamo i grafici di fig. 1.1.

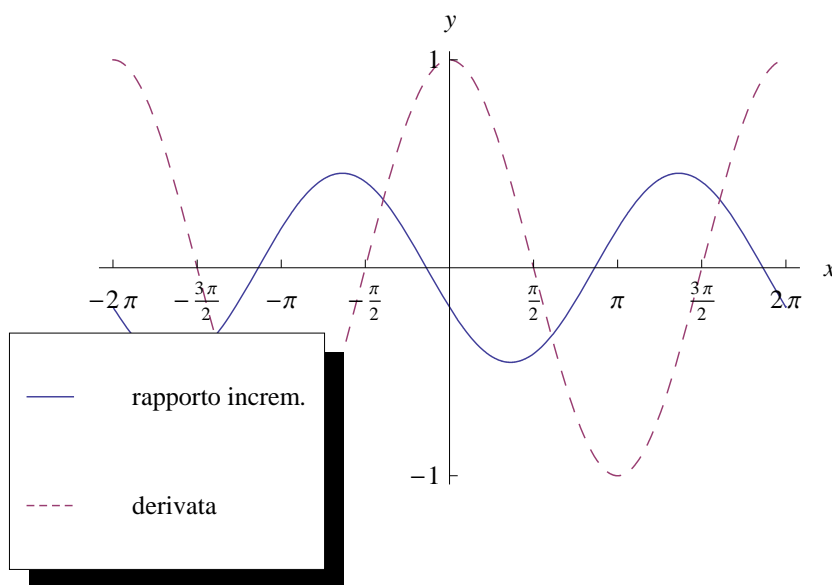


Figura 1.1: La curva continua è il grafico di $g_{\Delta x=4}(x) = \frac{\sin(x+4) - \sin x}{4}$, mentre la curva tratteggiata è il grafico della derivata di $f(x) = \sin x$, cioè $\cos x$.

Proviamo a diminuire l'incremento della variabile indipendente passando da $\Delta x = 4$ a $\Delta x = 1$, ottenendo i grafici di fig. 1.2, da cui vediamo che $g_{\Delta x}(x)$ si “avvicina” ulteriormente a $\cos x$.

Infine, per $\Delta x = 10^{-1}$ otteniamo il grafico di fig. 1.3, da cui vediamo che il grafico di $g_{\Delta x=10^{-1}}(x)$ è “quasi” sovrapposto a quello di $\cos x$.

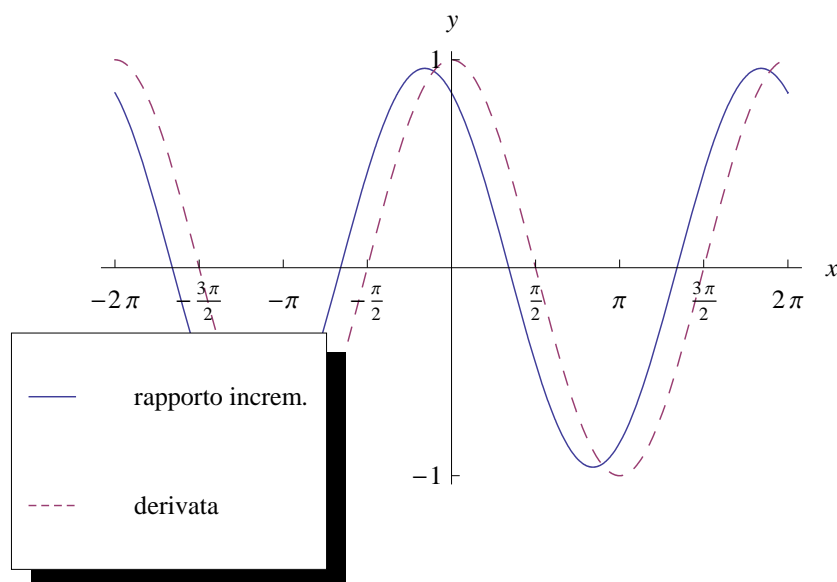


Figura 1.2: La curva continua è il grafico di $g_{\Delta x=1}(x) = \sin(x+1) - \sin x$, mentre la curva tratteggiata è il grafico della derivata di $f(x) = \sin x$, cioè $\cos x$.

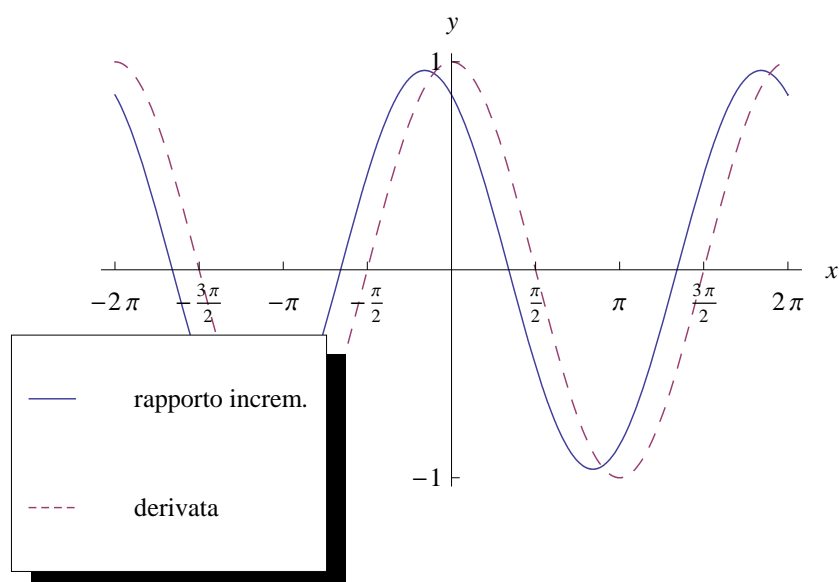


Figura 1.3: La curva continua è il grafico di $g_{\Delta x=10^{-1}}(x) = \frac{\sin(x+10^{-1}) - \sin x}{10^{-1}}$, mentre la curva tratteggiata è il grafico della derivata di $f(x) = \sin x$, cioè $\cos x$.

Capitolo 2

Interpretazione geometrica della derivata

2.1 La nozione di retta tangente al grafico di una funzione

Sia Γ il grafico della funzione (1.1) che supponiamo continua in X . Il punto $x_0 \in X$ individua il punto $P_0(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$, mentre un incremento $\Delta x \neq 0$ individua $P(x = x_0 + \Delta x, y = f(x_0 + \Delta x)) \in \Gamma$. Denotiamo con $s_{\Delta x}$ la retta per P_0 e P , ossia la secante a Γ per i detti punti. Dal momento che $\Delta x \neq 0$ si ha $x_0 + \Delta x \neq x_0$, cioè $s_{\Delta x}$ non è parallela all'asse y . Orientando $s_{\Delta x}$ nel verso delle ascisse crescenti (fig. 2.1), indichiamo con $\theta(x_0 + \Delta x)$ la misura in radianti dell'angolo che il semiasse positivo delle x forma con $s_{\Delta x}$. È chiaro che θ risulta essere una funzione di Δx :

$$\begin{aligned}\theta &: E'_{x_0} \rightarrow \mathbb{R} \\ \theta &: \Delta x \rightarrow \theta(x_0 + \Delta x), \quad \forall \Delta x \in E'_{x_0}\end{aligned}\tag{2.1}$$

Più precisamente, $\theta(x_0 + \Delta x) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\forall \Delta x \in E'_{x_0}$, onde se θ è regolare in $\Delta x = 0$, si ha $\theta_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, essendo

$$\theta_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \theta(x_0 + \Delta x)$$

Denotiamo con τ_0 la retta per P_0 e di coefficiente angolare $\tan \theta_0$:

$$\tau_0 : y = f(x_0) + (\tan \theta_0)(x - x_0)$$

Inoltre, l'incremento $\theta(x_0 + \Delta x) - \theta(x_0)$ della funzione (2.1) è la misura in radianti dell'angolo formato dalle rette $s_{\Delta x}$ e τ_0 . Da ciò segue che per $\Delta x \rightarrow 0$, il punto P si sposta lungo la curva Γ e tende a P_0 , mentre la retta $s_{\Delta x}$ compie una rotazione continua attorno a P_0 tale che $\theta(x_0 + \Delta x) - \theta_0 \rightarrow 0$, cioè fino a sovrapporsi alla retta τ_0 . in simboli:

$$\tau_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} s_{\Delta x},$$

cioè τ_0 è la posizione limite di $s_{\Delta x}$ per $\Delta x \rightarrow 0$, ovvero la retta tangente a Γ nel punto P_0 . Dalla fig. 2.1 vediamo che

$$\tan \theta(x_0 + \Delta x) = \frac{\overline{QP}}{\overline{P_0Q}} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

che è il coefficiente angolare di $s_{\Delta x}$, onde la sua equazione è:

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} (x - x_0)$$

Inoltre

$$\theta(x_0 + \Delta x) = \arctan \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

per cui

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \theta(x_0 + \Delta x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \arctan \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \arctan \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \end{aligned}$$

E se f è derivabile in x_0 :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \theta(x_0 + \Delta x) = \arctan f'(x_0)$$

Ma $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \theta(x_0 + \Delta x) = \theta_0$, onde l'equazione precedente porge:

$$\tan \theta_0 = f'(x_0), \tag{2.2}$$

cosicché la derivata prima di f in x_0 è il coefficiente angolare della retta tangente alla curva $y = f(x)$ nel punto di ascissa x_0 .

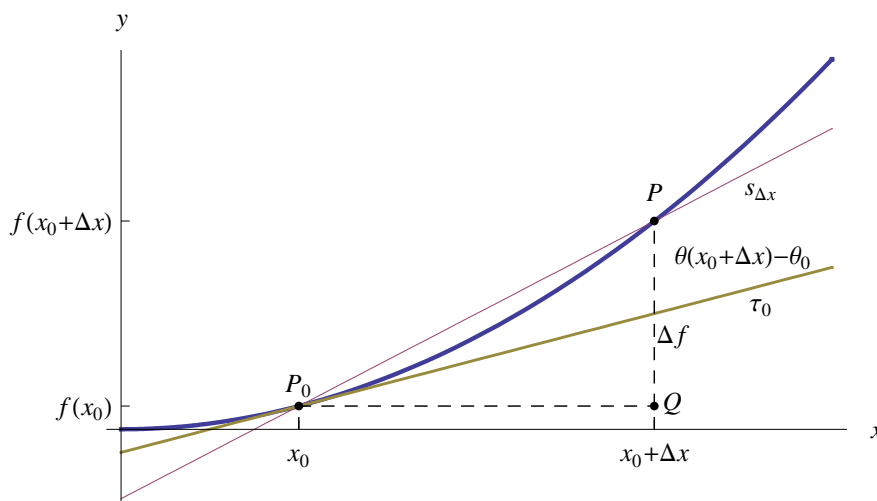


Figura 2.1: Interpretazione geometrica della derivata.

Capitolo 3

Funzioni non derivabili

3.1 Rapporto incrementale non regolare

Nel paragrafo 1.1 abbiamo definito la derivata in un punto $x_0 \in X$ di una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, definizione resa possibile dalla convergenza del rapporto incrementale:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad (3.1)$$

nel limite per $\Delta x \rightarrow 0$. È chiaro che ciò non sempre accade. Esistono, cioè, funzioni per le quali il rapporto (3.1) non è convergente per $\Delta x \rightarrow 0$, onde può essere divergente, convergente a sinistra e a destra o addirittura non regolare. Quest'ultimo caso si verifica per la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}, \quad (3.2)$$

che è continua in $x = 0$. Più precisamente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \quad (3.3)$$

Infatti

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (3.4)$$

Da ciò segue:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon = \varepsilon \mid 0 < |x| < \delta_\varepsilon \implies \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| < \delta_\varepsilon = \varepsilon,$$

cioè la (3.3). Ne consegue la continuità di (3.2) in $x = 0$. Il grafico di tale funzione è riportato in fig. 3.1. Dalla (3.4) vediamo che il suddetto grafico è contenuto nella regione delimitata dalle bisettrici del primo e quarto quadrante. Più precisamente, compie infinite oscillazioni tra tali rette; oscillazioni che si smorzano per $x \rightarrow 0$.

Scriviamo ora il rapporto incrementale della funzione (3.2) con punto iniziale x_0 :

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \right)_{x_0} = \frac{(x_0 + \Delta x) \sin \frac{1}{x_0 + \Delta x} - x_0 \sin \frac{1}{x_0}}{\Delta x}$$

Per $x_0 = 0$:

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \right)_{x_0=0} = \sin \frac{1}{\Delta x},$$

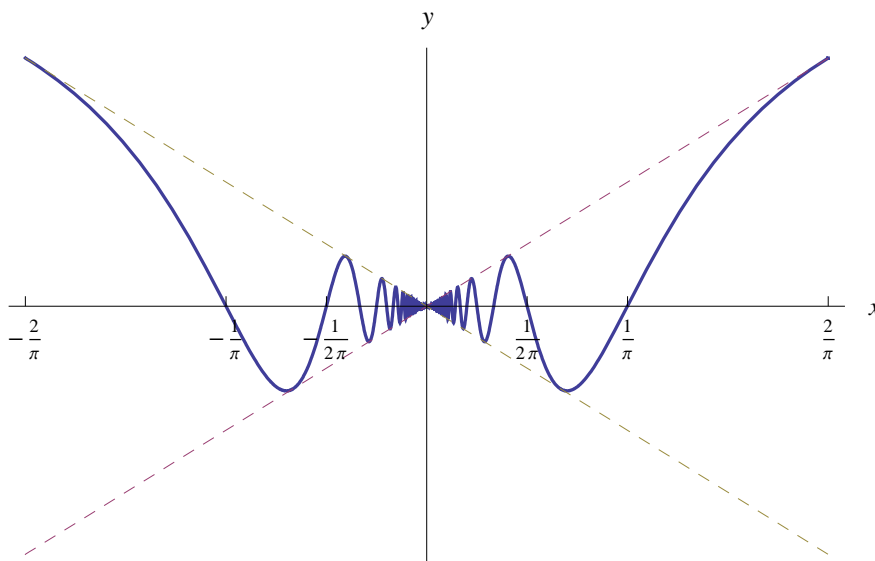


Figura 3.1: Grafico della funzione (3.2). La curva $y = f(x)$ compie infinite oscillazioni tra le bisettrici del primo e quarto quadrante. Le oscillazioni si smorzano per $x \rightarrow 0$.

che è non regolare per $\Delta x \rightarrow 0$. Più precisamente, il grafico di $\sin \frac{1}{\Delta x}$ compie, in ogni intorno di $\Delta x = 0$, infinite oscillazioni tra -1 e $+1$, come mostrato in fig. 3.2

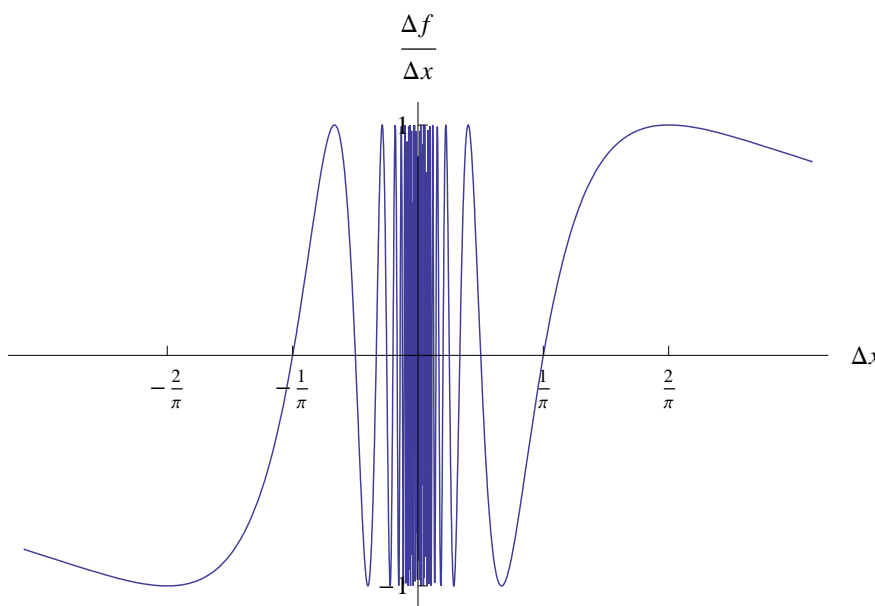


Figura 3.2: Grafico di $(\frac{\Delta f}{\Delta x})_{x_0=0}$.

D'altra parte, dal paragrafo 2 sappiamo che $(\frac{\Delta f}{\Delta x})_{x_0=0}$ è il coefficiente angolare della retta secante $s_{\Delta x}$ alla curva $y = f(x)$ per i punti $(0,0)$ e $P(\Delta x, f(\Delta x))$, come mostrato in fig. 3.3. Quindi:

$$s_{\Delta x} : y = \left(\sin \frac{1}{\Delta x} \right) x \implies \nexists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} s_{\Delta x}$$

In altri termini, per $\Delta x \rightarrow 0$ la secante $s_{\Delta x}$ non tende ad alcuna posizione limite. Più precisamente, oscilla tra le bisettrici del primo e quarto quadrante, i.e. le rette $y = \pm x$.

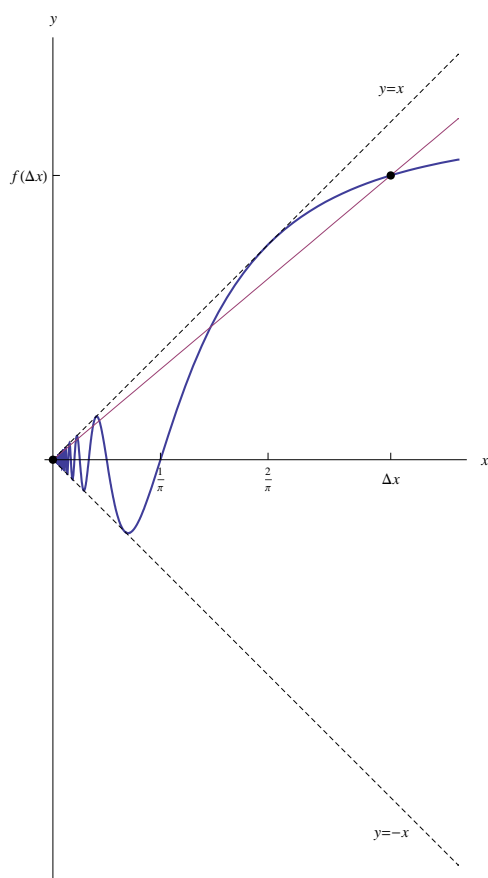


Figura 3.3: Nel limite per $\Delta x \rightarrow 0$ la retta secante $s_{\Delta x}$ oscilla tra le bisettrici $y = \pm x$, senza tendere ad alcuna posizione limite.

Ne concludiamo che la funzione (3.2) pur essendo continua in $x = 0$ non è ivi derivabile. Tuttavia, esiste un legame tra continuità e derivabilità, espressa dal seguente teorema:

Teorema 2

$$\left(\begin{array}{l} f \text{ è derivabile} \\ \text{in } x_0 \end{array} \right) \implies \left(\begin{array}{l} f \text{ è continua} \\ \text{in } x_0 \end{array} \right)$$

Dimostrazione. Per ipotesi:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

Posto $x = x_0 + \Delta x$ la relazione precedente si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

D'altra parte $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} (x - x_0)$, cosicchè:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{=f'(x_0) \in \mathbb{R}} \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)}_{=0} \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde l'asserto. ■

Si badi che il teorema non è invertibile:

$$\left(\begin{array}{l} f \text{ è continua} \\ \text{in } x_0 \end{array} \right) \not\Rightarrow \left(\begin{array}{l} f \text{ è derivabile} \\ \text{in } x_0 \end{array} \right),$$

come si evince dall'esempio della funzione (3.2). In altri termini, la continuità è una condizione necessaria ma non sufficiente per la derivabilità o, ciò che è lo stesso la derivabilità è una condizione sufficiente ma non necessaria per la continuità.

Consideriamo ora il caso in cui il rapporto incrementale

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \right)_{x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

è convergente a sinistra e a destra per $\Delta x \rightarrow 0$. Precisamente:

$$f'_-(x_0) \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{3.5}$$

e

$$f'_+(x_0) \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{3.6}$$

dove $f'_-(x_0), f'_+(x_0) \in \mathbb{R}$, $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$. In altri termini, i limiti (3.5)-(3.6) oltre ad essere determinati e finiti, sono distinti. In tal caso si dice che f è **derivabile a sinistra e a destra** in x_0 (pur non essendo ivi derivabile). I numeri reali $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$ si dicono rispettivamente la **derivata sinistra** e la **derivata destra** di f nel punto x_0 .

Esempio 3 Studiamo il comportamento del rapporto incrementale (di punto iniziale $x_0 = 0$) della funzione:

$$f(x) = |\sin x| \quad (3.7)$$

Osserviamo innanzitutto che tale funzione è periodica di periodo $T = \pi$, per cui possiamo considerare la sua restrizione all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$. Tuttavia, per una questione di visualizzazione riferiamoci all'intervallo $[-\pi, \pi]$. Comunque prendiamo $x_0 \in [-\pi, \pi]$, il relativo rapporto incrementale è:

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_{x_0} = \frac{|\sin(x_0 + \Delta x)| - |\sin x_0|}{\Delta x} \quad (3.8)$$

Il punto che ci interessa è $x_0 = 0$, onde:

$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_{x_0=0} = \frac{|\sin(\Delta x)|}{\Delta x} = \begin{cases} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}, & \text{se } \Delta x > 0 \\ -\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}, & \text{se } \Delta x < 0 \end{cases}, \quad (3.9)$$

che ha in $\Delta x = 0$ una discontinuità di prima specie. Infatti:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_{x_0=0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1^- \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_{x_0=0} &= -\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = -1^+, \end{aligned}$$

per cui il salto di discontinuità è $s(\Delta x = 0) = 2$. In fig. 3.4 riportiamo il grafico del rapporto incrementale (3.8), da cui è visibile la discontinuità in $\Delta x = 0$.

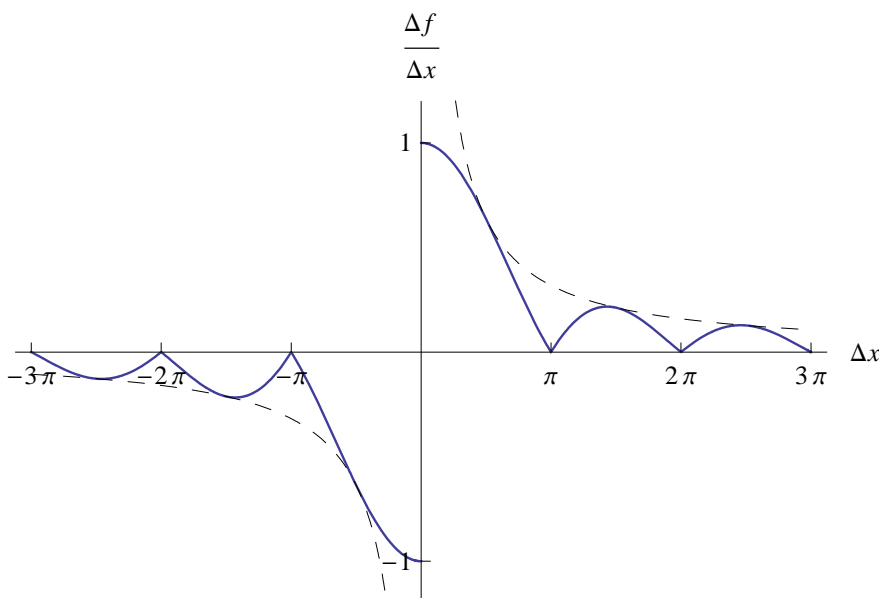


Figura 3.4: La curva grassetta è il grafico del rapporto incrementale (3.8) in funzione di Δx . Tale curva è inviluppata dalle curve tratteggiate $y = \frac{1}{\Delta x}$ e $y = -\frac{1}{\Delta x}$.

Ne consegue che la funzione (3.7) non è derivabile in $x_0 = 0$, ma lo è a destra e a sinistra, avendosi:

$$f'_+(0) = -1, \quad f'_-(0) = 1$$

Come nell'esempio 1, anche qui è istruttivo confrontare il grafico del rapporto incrementale con la derivata, che è manifestamente data da:

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{se } x \geq 0 \\ -\cos x, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

. Per "grafico del rapporto incrementale" intendiamo non il grafico riportato in fig. 3.4, bensì quello della funzione:

$$g_{\Delta x}(x) = \frac{|\sin(x + \Delta x)| - |\sin x|}{\Delta x},$$

mentre Δx svolge il ruolo di parametro reale non nullo. È chiaro che l'approssimazione $g_{\Delta x}(x) \sim f'(x)$ migliora al diminuire di Δx , giacchè:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x) = f'(x)$$

Ad esempio, per $\Delta x = 4$ otteniamo i grafici di fig. 3.5.

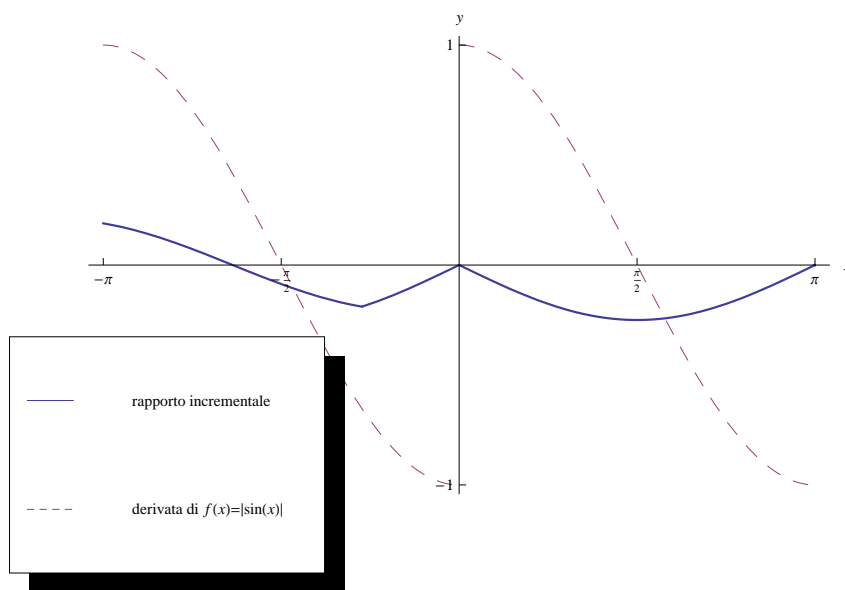


Figura 3.5: La curva continua è il grafico di $g_{\Delta x=4}(x) = \frac{|\sin(x+4)| - |\sin x|}{4}$, mentre la curva tratteggiata è il grafico della derivata della funzione assegnata.

Proviamo a diminuire l'incremento della variabile indipendente passando da $\Delta x = 4$ a $\Delta x = 2$, ottenendo i grafici di fig. 3.6, da cui vediamo che $g_{\Delta x}(x)$ si "avvicina" ulteriormente a $f'(x)$.

Infine, per $\Delta x = 10^{-1}$ otteniamo il grafico di fig. 3.7, da cui vediamo che il grafico di $g_{\Delta x=10^{-1}}(x)$ è "quasi" sovrapposto a quello di $f'(x)$.

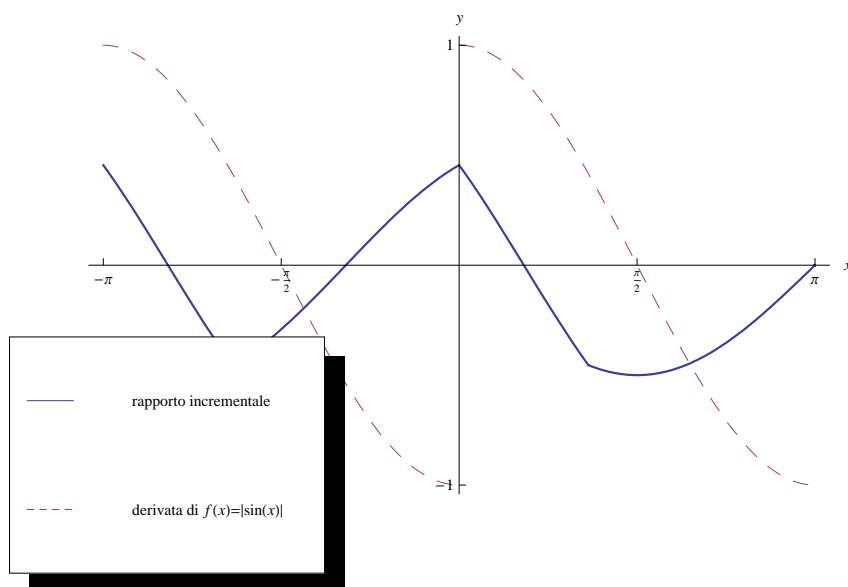


Figura 3.6: La curva continua è il grafico di $g_{\Delta x=2}(x) = \frac{|\sin(x+1)| - |\sin x|}{2}$, mentre la curva tratteggiata è il grafico della derivata della funzione assegnata.

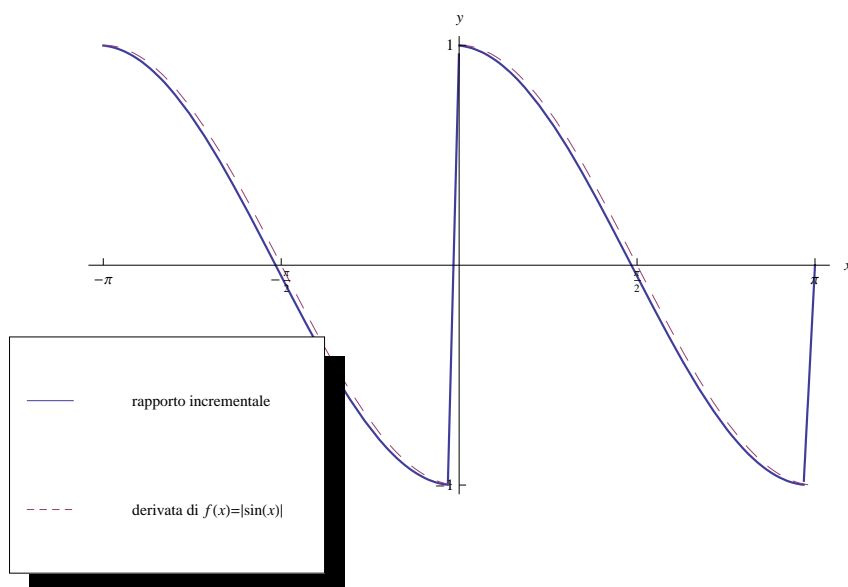


Figura 3.7: La curva continua è il grafico di $g_{\Delta x=2}(x) = \frac{|\sin(x+1)| - |\sin x|}{2}$, mentre la curva tratteggiata è il grafico della derivata della funzione assegnata.

Può poi verificarsi il caso in cui f è derivabile solo a sinistra o solo a destra. Ad esempio:

$$f'_-(x_0) \in \mathbb{R}, \quad \nexists f'_+(x_0)$$

e viceversa. Infine, il rapporto incrementale può essere divergente:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \pm\infty$$

In tal caso si dice che la funzione ha **derivata infinita** in x_0 . Tale locuzione si conserva se la divergenza si verifica solo a destra o solo a sinistra. Ad esempio:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = +\infty, \quad f'_+(x_0) \in \mathbb{R}$$

Capitolo 4

Interpretazione geometrica della derivata (parte seconda)

4.1 Punti di flesso a tangente verticale. Punti angolosi. Cuspidi

Nel paragrafo 2 abbiamo visto che la derivata di una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, calcolata in $x_0 \in X$, è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $P_0(x_0, f(x_0))$. Nel caso di una funzione non derivabile abbiamo considerato l'esempio della funzione (3.2) per la quale il rapporto incrementale di punto iniziale $x_0 = 0$, è oscillante tra -1 e 1 in ogni intorno di $\Delta x = 0$, giungendo alla conclusione della inesistenza della retta tangente nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

Ci restano da analizzare i seguenti casi:

1. La funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua in x_0 , ha ivi derivata infinita.
2. La funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua in x_0 , non è ivi derivabile, ma lo è a destra e a sinistra.

Nel caso 1, iniziamo a supporre $f'(x_0) = +\infty$. Dalla (2.2):

$$\tan \theta_0 = +\infty \implies \theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

Se invece $f'(x_0) = -\infty$, si ha

$$\tan \theta_0 = -\infty \implies \theta_0 = -\frac{\pi}{2}$$

Ne consegue che nel caso 2 il diagramma cartesiano della funzione è ancora dotato di retta tangente, con la differenza che ora tale retta è parallela all'asse y :

$$\tau_0 : x = x_0$$

. Più precisamente se $f'(x_0) = +\infty$, τ_0 è orientata verso l'alto. Viceversa, verso il basso. Ciò è illustrato nelle figg. 4.1-4.2

Nelle figg. 4.1-4.2 vediamo che τ_0 attraversa la curva $\gamma : y = f(x)$ nel punto $P_0(x_0, f(x_0))$, nel senso che essa si "flette" in P_0 . Diremo quindi che P_0 è un punto di inflessione o meglio, **un punto di flesso a tangente verticale**. E τ_0 si chiama **tangente di flesso**.

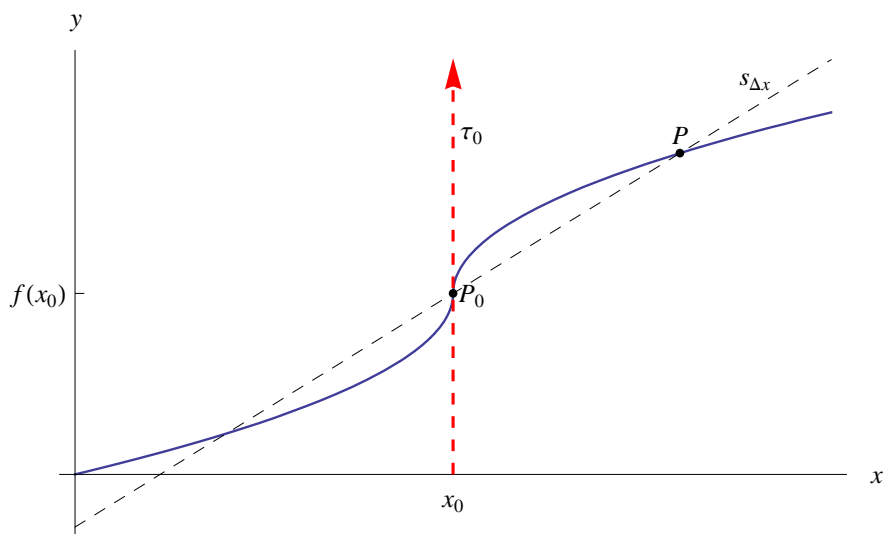


Figura 4.1: La funzione f ha in x_0 derivata infinita: $f'(x_0) = +\infty$.

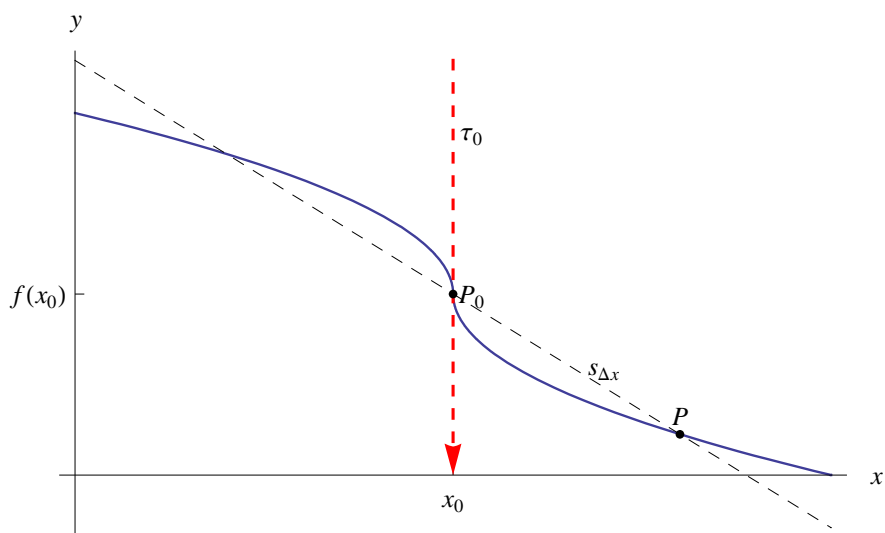


Figura 4.2: La funzione f ha in x_0 derivata infinita: $f'(x_0) = -\infty$.

Esempio 4 Studiamo la derivabilità in x_0 della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{x - x_0}, & \text{se } x \geq x_0 \\ 1 - \sqrt{x_0 - x}, & \text{se } x < x_0 \end{cases}, \quad (4.1)$$

La (4.1) è definita in $X = (-\infty, +\infty)$ ed è ivi continua. Infatti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} (1 + \sqrt{x - x_0}) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} (1 - \sqrt{x_0 - x}) = 1, \end{aligned}$$

cosicchè

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1 = f(x_0),$$

da cui la continuità di $f(x)$ in x_0 . Studiamo ora il rapporto incrementale di punto iniziale x_0 . Per $\Delta x > 0$ è $x > x_0$, per cui:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}}$$

Per $\Delta x < 0$ è $x < x_0$, per cui:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= -\frac{\sqrt{-\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\sqrt{|\Delta x|}}{|\Delta x|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{|\Delta x|}} \end{aligned}$$

Cioè:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{|\Delta x|}}, \quad \forall \Delta x \neq 0 \quad (4.2)$$

Eseguendo il limite per $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{|\Delta x|}} = +\infty,$$

per cui la funzione assegnata ha derivata infinita nel punto x_0 . Ne concludiamo che $P(x_0, 1)$ è un punto di flesso a tangente verticale per $\gamma : y = f(x)$, come illustrato nel grafico di fig. 4.1. Osserviamo, infine, che la retta secante per P_0 e $P(x = x_0 + \Delta x, y = y_0 + \Delta x)$ ha equazione:

$$s_{\Delta x} : y = f(x_0) + \frac{1}{\sqrt{|\Delta x|}}(x - x_0)$$

Cioè

$$s_{\Delta x} : y = f(x_0) + \frac{x - x_0}{\sqrt{|\Delta x|}}$$

Per quanto precede, il risultato dell'operazione di passaggio al limite $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} s_{\Delta x}$ è $\tau_0 : x - x_0 = 0$.

Passiamo al caso 2. Ora il rapporto incrementale è non regolare per $\Delta x \rightarrow 0$, ma è convergente a sinistra e a destra:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= f'_+(x_0) \in \mathbb{R} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= f'_-(x_0) \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

con $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$. Denotiamo con τ_0^- e τ_0^+ le rette per $P_0(x_0, f(x_0))$ e di coefficiente angolare $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$, rispettivamente. Cioè:

$$\tau_0^\pm : y = f(x_0) + f'_\pm(x_0)(x - x_0)$$

Riesce

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} s_{\Delta x} = \tau_0^+ \text{ e } \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} s_{\Delta x} = \tau_0^-$$

Cioè la retta secante $s_{\Delta x}$ tende a due posizioni limite distinte a seconda della direzione di “avvicinamento a zero” di Δx . La retta τ_0^+ è tangente all'arco γ_+ dato da

$$\gamma_+ = \{(x, f(x)) \in \gamma \mid x > x_0\},$$

ossia l'arco del grafico di $f(x)$ contenuto nel semipiano $x > x_0$. Allo stesso modo τ_0^- è tangente a γ_- :

$$\gamma_- = \{(x, f(x)) \in \gamma \mid x < x_0\},$$

che è l'arco di γ contenuto nel semipiano $x < x_0$. Ne consegue che $\gamma = \gamma_- \cup \gamma_+$, cioè il grafico di f è l'unione dei due archi γ_-, γ_+ che si raccordano¹ nel punto P_0 . È chiaro che il grafico è privo di retta tangente in P_0 . Tuttavia, per quanto precede, restano definite le rette τ_0^\pm quali posizione limite della secante. Tali rette prendono rispettivamente il nome di **retta tangente a destra** (τ_0^+) e **retta tangente a sinistra** (τ_0^-) in P_0 . Il punto P_0 , invece, si chiama **punto angoloso** del diagramma cartesiano della funzione.

Abbiamo contemplato la convergenza a sinistra e a destra. Generalizzando, può verificarsi ad esempio, il caso:

$$f'_-(x_0) = +\infty, f'_+(x_0) \in \mathbb{R}$$

In tal caso, la tangente a sinistra è parallela e concorde all'asse y , i.e. $\tau_0^- : x = x_0$.

Esempio 5 Studiamo la derivabilità della funzione

$$f(x) = |\ln x| \tag{4.3}$$

nel punto $x_0 = 1$.

Osserviamo innanzitutto che la funzione è definita in $X = (0, +\infty)$ e che $x_0 = 1$ è un suo zero al finito. Scriviamo il rapporto incrementale relativo al punto $x_0 = 1$:

$$\frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{|\ln(1 + \Delta x)|}{\Delta x}$$

Riesce:

$$\begin{aligned}\Delta x > 0 &\implies 1 + \Delta x > 1 \implies \ln(1 + \Delta x) > 0 \\ \Delta x < 0 &\implies 1 + \Delta x < 1 \implies \ln(1 + \Delta x) < 0,\end{aligned}$$

¹Il raccordo segue dalla continuità di f in x_0 .

onde

$$\frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \begin{cases} \frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}, & \text{se } \Delta x > 0 \\ -\frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}, & \text{se } \Delta x < 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \Delta x)}{\Delta x} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1 + \Delta x)}{\Delta x} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Per determinare i limiti (4.5) dobbiamo tener presente il limite notevole:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg_a(1+x)}{x} = \lg_a e,$$

da cui

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \ln e = 1$$

e

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = -\ln e = -1$$

Cioè

$$f'_+(1) = 1, \quad f'_-(1) = -1$$

Ne consegue che $P_0(1, 0)$ è un punto angoloso per $\gamma : y = |\ln x|$. Le tangenti a sinistra e a destra sono:

$$\tau_0^- : y = -x + 1, \quad \tau_0^+ : y = x - 1,$$

come illustrato in fig. 4.3

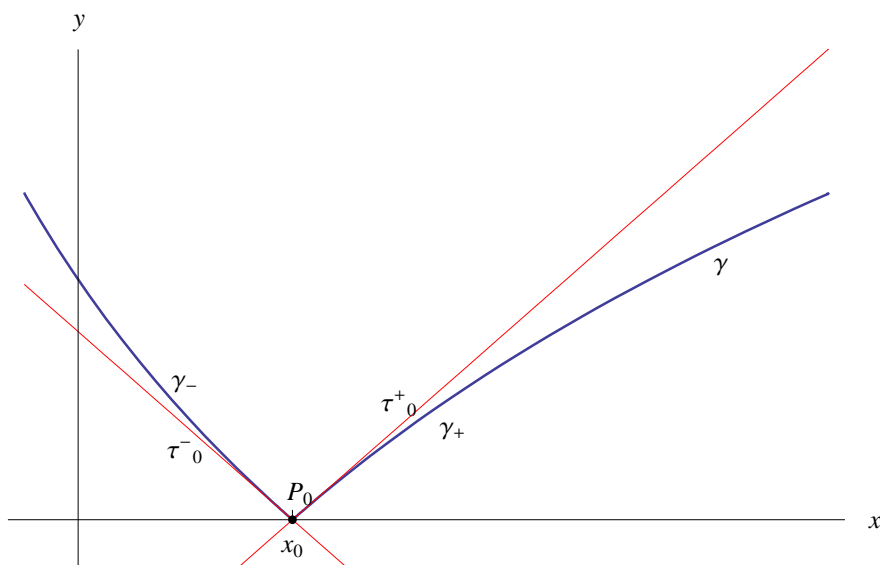


Figura 4.3: Il punto $P_0(1, 0)$ è un punto angoloso per il diagramma cartesiano della funzione $f(x) = |\ln x|$.

Ci rimane da esaminare il caso di una funzione non derivabile in x_0 ma con derivata destra e sinistra infinite e di segni opposti. Senza perdita di generalità:

$$f'_-(x_0) = -\infty, f'_+(x_0) = +\infty$$

I due archi γ_- e γ_+ si raccordano in $P_0(x_0, f(x_0))$, mentre la retta secante ha il seguente comportamento:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} s_{\Delta x} = \tau_0^+ \text{ e } \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} s_{\Delta x} = \tau_0^-,$$

dove

$$\tau_0^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = x_0, f(x_0) \leq y < +\infty\}, \tag{4.6}$$

cioè è la semiretta di origine P_0 , parallela all'asse y e orientata verso l'alto. E

$$\tau_0^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = x_0, -\infty < y \leq f(x_0)\}, \tag{4.7}$$

ovvero la semiretta di origine P_0 , parallela all'asse y e orientata verso il basso. I luoghi geometrici (4.6) e (4.6) si chiamano rispettivamente semitangente a destra e semitangente a sinistra, mentre il punto P_0 si dice **punto cuspidale** o semplicemente **cuspidale**.

Esempio 6 Studiamo la derivabilità in x_0 della funzione:

$$f(x) = 1 + 5\sqrt{|x - x_0|}$$

Come nel caso della funzione dell'esempio 4, anche qui si ha la continuità in tutto \mathbb{R} . Per scrivere il rapporto incrementale relativo al punto x_0 , è conveniente esplicitare il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 5\sqrt{x - x_0}, & \text{se } x \geq x_0 \\ 1 + 5\sqrt{x_0 - x}, & \text{se } x < x_0 \end{cases}$$

Per $\Delta x > 0$ è $x > x_0$, per cui:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 5 \frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{5}{\sqrt{\Delta x}}$$

Per $\Delta x < 0$ è $x < x_0$, per cui:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= 5 \frac{\sqrt{-\Delta x}}{\Delta x} \\ &= -5 \frac{\sqrt{-\Delta x}}{-\Delta x} \\ &= -\frac{5}{\sqrt{-\Delta x}} \end{aligned}$$

Cioè:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \begin{cases} \frac{5}{\sqrt{\Delta x}}, & \text{se } \Delta x > 0 \\ -\frac{5}{\sqrt{-\Delta x}}, & \text{se } \Delta x < 0 \end{cases}, \tag{4.8}$$

che ci permette di scrivere le equazioni delle rette secanti a sinistra e a destra:

$$\begin{aligned} s_{\Delta x < 0} : y &= 1 - \frac{5}{\sqrt{-\Delta x}}(x - x_0) \\ s_{\Delta x > 0} : y &= 1 + \frac{5}{\sqrt{\Delta x}}(x - x_0) \end{aligned}$$

Eseguendo il limite per $\Delta x \rightarrow 0$:

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = -5 \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{-\Delta x}} = -\infty$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 5 \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = +\infty,$$

onde:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} s_{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} s_{\Delta x < 0} = \tau_0^- = \{(x, y) \in \gamma \mid x = x_0, -\infty < y \leq 1\}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} s_{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} s_{\Delta x > 0} = \tau_0^+ = \{(x, y) \in \gamma \mid x = x_0, 1 \leq y < +\infty\}$$

Ne consegue che $P_0(x_0, 1)$ è una cuspide per il grafico di $f(x)$ come illustrato in fig. 4.4

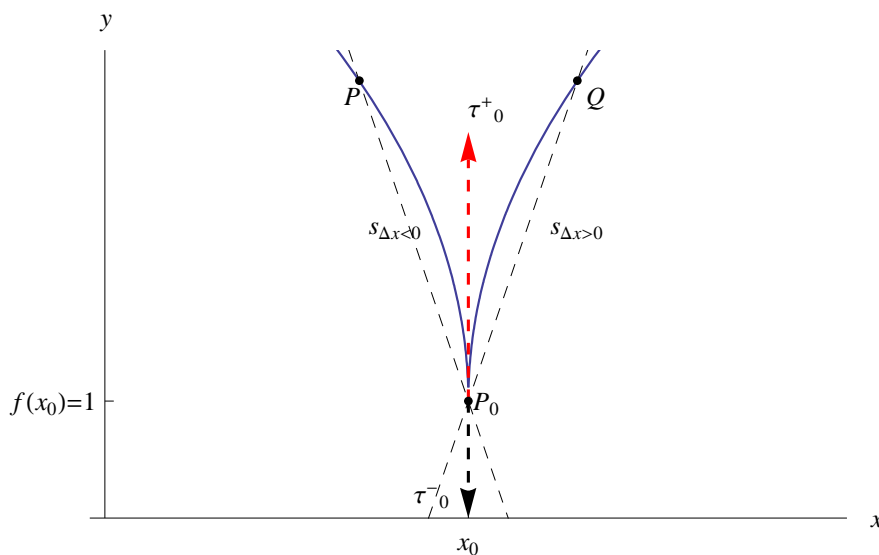


Figura 4.4: Il punto $P_0(x_0, 1)$ è un punto cuspidale per il diagramma cartesiano della funzione $f(x) = 1 + 5\sqrt{|x - x_0|}$.

Parte II

Applicazioni

Capitolo 5

La derivata nell'ambiente di calcolo *Mathematica*

5.1 Routine

Elaboriamo una routine in ambiente *Mathematica* proposta da Stan Wagon nel suo libro [1]. Per inciso, Wagon è abbastanza misterioso per ciò che riguarda il contenuto analitico delle routine proposte in [1], per cui cercheremo di approfondire, per così dire, la parte teorica.

La routine genera un'animazione grafica in cui il diagramma cartesiano della derivata di una funzione reale di una variabile reale viene tracciato dalla retta tangente che si muove lungo il diagramma medesimo. In particolare, si assume come funzione di prova:

$$f(x) = \sin x, \quad (5.1)$$

per cui

$$f'(x) = \cos x \quad (5.2)$$

Per *plottare* la funzione (5.1) dobbiamo assegnare un intervallo limitato, ad esempio:

$$A(x_1) = [-x_1, x_1] \quad (5.3)$$

Qui è $x_1 > 0$ e in questo lavoro noi assumiamo tale grandezza come parametro il cui valore verrà poi fissato dall'utente¹. La derivata viene invece *plottata* sull'intervallo:

$$I_{n,\delta_r}(t) = \left[- \left(x_1 + \frac{\delta_r}{n} \right), t \right], \quad (5.4)$$

dove t è un parametro reale tale che $-x_1 \leq t \leq x_2$, mentre n è un intero positivo assegnato e $\delta_r = \frac{2x_1}{r}$ con $r \in \mathbb{N} - \{0\}$, cosicchè δ_1 è l'ampiezza di $A(x_1)$, δ_2 è la semiampiezza, e così via. Per una visualizzazione grafica c'è la fig. 5.1.

Ad esempio, per $x_1 = 2$, $r = 10$, $n = 100$, $t = 1.2$, il grafico di $f(x)$ e della sua derivata sono riportati in fig. 5.2.

A noi interessa costruire il grafico della derivata attraverso il coefficiente angolare della retta tangente che, come è noto, è il valore assunto dalla derivata prima in un assegnato punto $x \in I_{n,\delta_r}(t)$. Iniziamo con l'osservare che l'equazione della retta tangente τ_0 a $\gamma : y = f(x)$ nel punto di ascissa $x_0 \in A(x_1)$ è:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad (5.5)$$

¹In [1] si assume definitivamente $x_1 = 2$.

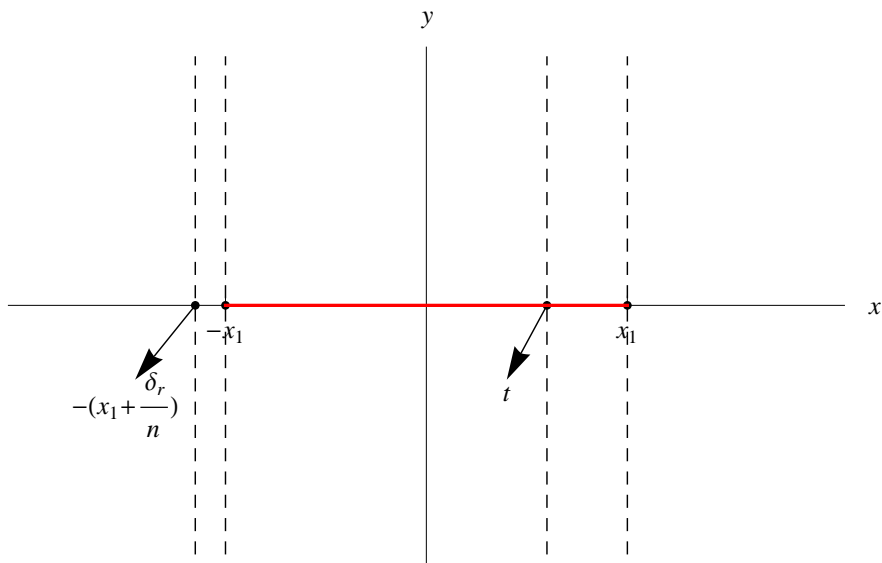


Figura 5.1: Il segmento rosso rappresenta l'intervallo in cui viene plottata la funzione $f(x) = \sin x$, mentre i punti $-(x_1 + \frac{\delta_r}{n})$ e t denotano gli estremi dell'intervallo in cui viene plottata la derivata.

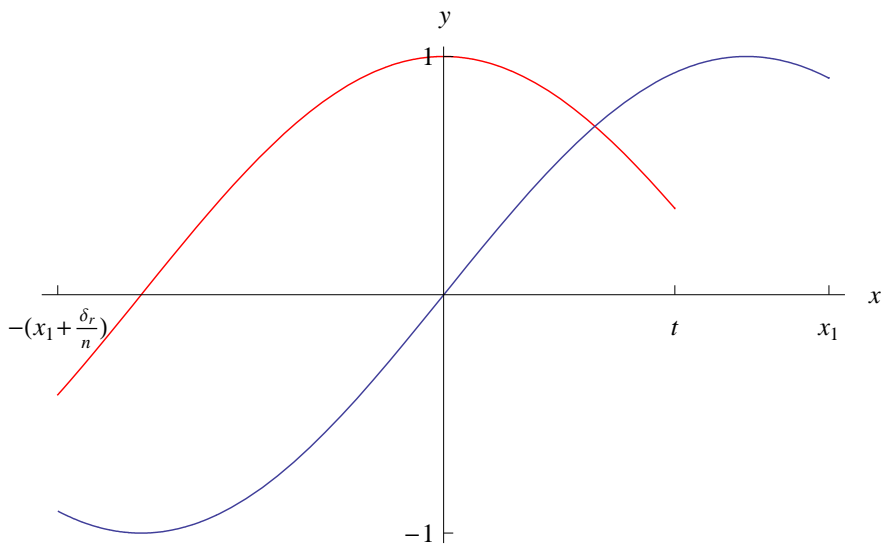


Figura 5.2: Grafici di $f(x)$ e $f'(x)$ (curva in rosso) nei rispettivi intervalli $A(x_1 = 2)$ $I_{n=100, \delta_{10}}$, con il parametro $t = 1.2$.

Una coppia di numeri direttori di τ_0 è

$$\lambda = 1, \mu = f'(x_0) \quad (5.6)$$

Rammentiamo che i numeri direttori sono le componenti di un qualunque vettore parallelo alla retta assegnata, per cui dalle (5.6) si ha

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{i} + f'(x_0)\mathbf{j}, \quad (5.7)$$

essendo i e j i versori degli assi coordinati, come mostrato in fig. 5.3.

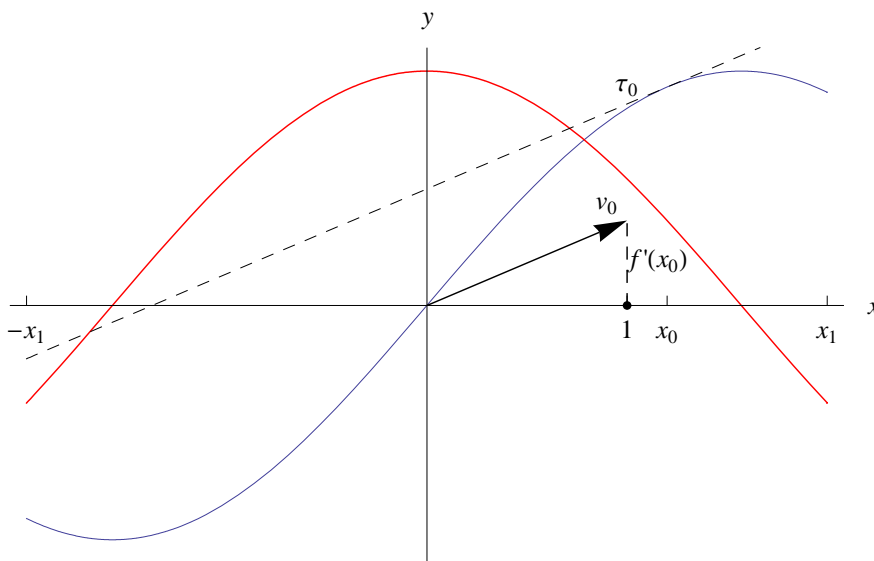


Figura 5.3: τ_0 è la retta tangente a $\gamma : y = f(x)$, mentre il vettore \mathbf{v}_0 ha componenti cartesiane 1 e $f'(x_0)$ rispettivamente che sono numeri direttori di τ_0 . Ne consegue che \mathbf{v}_0 è parallelo a τ_0 .

Inoltre, come illustrato in fig. 5.3, la componenti di \mathbf{v}_0 nella direzione dell'asse y è $f'(x_0)$. Se ora facciamo variare x_0 da $-x_1$ a x_1 , il vettore \mathbf{v}_0 ruota attorno all'origine conservando la componente secondo l'asse x , come illustrato in questa [gif animata](#). Ora prendiamo due punti $P'_0, P''_0 \in \tau_0$ tali che P_0 è il punto medio di $\overline{P'_0, P''_0}$. Precisamente, P'_0 è il punto di ascissa $x'_0 = x_0 - \frac{\delta_r}{3}$, mentre l'ascissa di P''_0 è $x''_0 = x_0 + \frac{\delta_r}{3}$, per cui

$$P'_0 \left(x_0 - \frac{\delta_r}{3}, f(x_0) - \frac{\delta_r}{3} f'(x_0) \right), \quad P''_0 \left(x_0 + \frac{\delta_r}{3}, f(x_0) + \frac{\delta_r}{3} f'(x_0) \right), \quad (5.8)$$

come illustrato in fig. 5.4.

Arrivati a questo punto, non dobbiamo fare altro che far variare x_0 da $-x_1$ a x_1 . Ciò può essere fatto riprendendo la routine per il tracciamento dei grafici di $f(x)$ e $f'(x)$. Per i dettagli tecnici si rimanda al pdf contenente il codice Mathematica a questo [link](#).

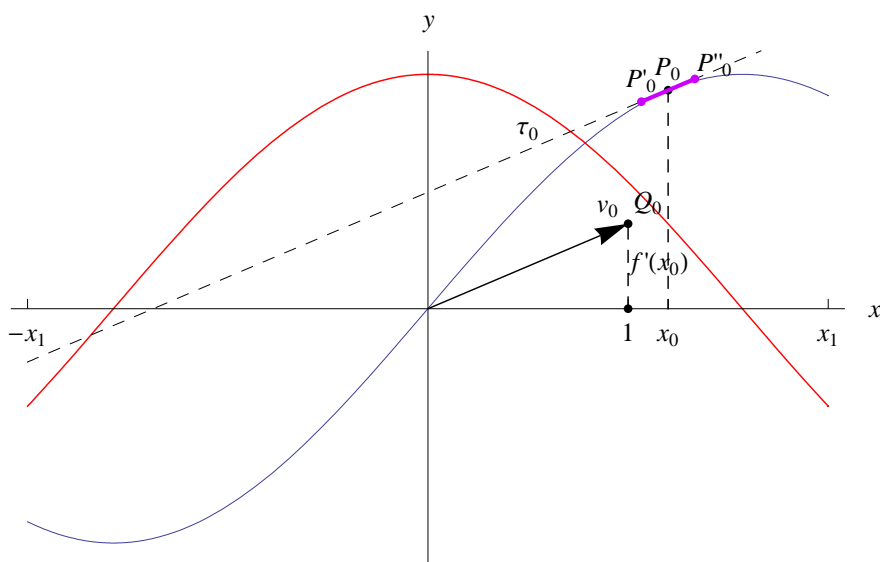


Figura 5.4: Il segmento congiungente i punti (5.8) è tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa x_0 .

Capitolo 6

Interpretazione cinematica dei punti di flesso a tangente verticale

6.1 Moto piano di una particella

Consideriamo una particella di massa m compie un moto piano lungo una traiettoria γ di rappresentazione parametrica:

$$x = v_0 t, \quad y = y(t), \quad t \in [0, +\infty), \quad (6.1)$$

essendo t il tempo, mentre

$$y(t) = \begin{cases} y_0 + \eta_0 \sqrt{t - t_0}, & \text{se } t \geq t_0 \\ y_0 - \eta_0 \sqrt{t_0 - t}, & \text{se } t < t_0 \end{cases}, \quad (6.2)$$

dove $v_0 > 0$ e $\eta_0 > 0$ sono due costanti con le appropriate dimensioni¹. Il numero reale $t_0 > 0$ è, invece, un istante assegnato da non confondere con l'istante iniziale che è $t = 0$. La traiettoria γ non è una curva regolare poiché $\ddot{y}(t)$ ha una discontinuità di seconda specie in t_0 . Infatti, osservando che

$$\frac{d}{dt} \sqrt{t - t_0} = \frac{1}{2\sqrt{t - t_0}}, \quad \frac{d}{dt} \sqrt{t_0 - t} = -\frac{1}{2\sqrt{t_0 - t}},$$

si ha:

$$\dot{y}(t) = \begin{cases} \frac{\eta_0}{2\sqrt{t - t_0}}, & \text{se } t > t_0 \\ \frac{\eta_0}{2\sqrt{t_0 - t}}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \end{cases}, \quad (6.3)$$

cioè

$$\dot{y}(t) = \frac{\eta_0}{2\sqrt{|t - t_0|}} \quad (6.4)$$

La derivata prima è definita in $[0, t_0) \cup (t_0, +\infty)$, ed eseguendo il limite per $t \rightarrow t_0$:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \dot{y}(t) = +\infty, \quad (6.5)$$

da cui si ha che (t_0, y_0) è un punto di flesso a tangente verticale per $\Gamma_y : y = y(t)$. Studiamo ora la funzione $y(t)$.

¹In particolare, v_0 è la componente della velocità \mathbf{v} della particella nella direzione dell'asse x .

Insieme di definizione

La funzione (6.2) è definita in \mathbb{R} , ma dal momento che il tempo t è non negativo, consideriamo la restrizione a $[0, +\infty)$ in accordo con la (6.1).

Intersezione con gli assi

$$y(0) = y_0 - \eta_0 \sqrt{t_0} \stackrel{def}{=} y_1, \tag{6.6}$$

per cui il Γ_y interseca l'asse delle ordinate in $(0, y_1)$. Per determinare le radici di $y(t) = 0$, dobbiamo separare i due casi $t > t_0$ e $t < t_0$. Abbiamo

$$t > t_0 \implies y_0 + \eta_0 \sqrt{t - t_0} = 0 \implies \sqrt{t - t_0} = -\frac{y_0}{\eta_0} < 0 \quad \text{mai!}$$

$$0 \leq t < t_0 \implies y_0 - \eta_0 \sqrt{t_0 - t} = 0 \implies t_0 - t = \left(\frac{y_0}{\eta_0}\right)^2,$$

da cui $t_1 = t_0 - \left(\frac{y_0}{\eta_0}\right)^2 < t_0$ è uno zero di $y(t) \implies \Gamma_y$ interseca l'asse delle ascisse in $(t_1, 0)$.

Segno della funzione

Riesce

$$y(t) > 0, \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$$

Per $0 \leq t < t_0$ dobbiamo risolvere la disequazione

$$y_0 - \eta_0 \sqrt{t_0 - t} > 0 \iff t \geq t_1$$

Cioè

$$y(t) < 0, \quad \forall t \in [0, t_1)$$

Comportamento agli estremi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (y_0 + \eta_0 \sqrt{t - t_0}) = +\infty$$

Cioè la funzione diverge positivamente per $t \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{t} = \frac{y_0 + \eta_0 \sqrt{t - t_0}}{t} = 0 \quad (\text{per confronto tra infiniti})$$

Ne consegue l'assenza di asintoti obliqui.

Studio della derivata prima

Dalle (6.4) vediamo che

$$\dot{y}(t) > 0, \quad \forall t \in [0, +\infty) - \{t_0\} \tag{6.7}$$

Cioè la funzione $y(t)$ è strettamente crescente in X .

Derivata seconda

Calcoliamo a parte:

$$\frac{d}{dt} (t - t_0)^{-1/2} = -\frac{1}{2} (t - t_0)^{-3/2}$$

$$\frac{d}{dt} (t_0 - t)^{-1/2} = -\frac{1}{2} (t_0 - t)^{-3/2}$$

Quindi

$$\ddot{y}(t) = \begin{cases} -\frac{\eta_0}{4\sqrt{(t-t_0)^3}}, & \text{se } t > t_0 \\ \frac{\eta_0}{4\sqrt{(t_0-t)^3}}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \end{cases} \quad (6.8)$$

Riesce

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) &> 0, \quad \forall t \in [0, t_0) \\ \ddot{y}(t) &< 0, \quad \forall t \in (t_0, +\infty) \end{aligned}$$

Ne consegue che $\Gamma_y : y = y(t)$ volge la concavità verso l'alto in $[0, t_0)$, verso il basso in $(t_0, +\infty)$.

Tracciamento del grafico

A questo punto siamo in grado di tracciare il grafico Γ_y , come illustrato in fig. 6.1.

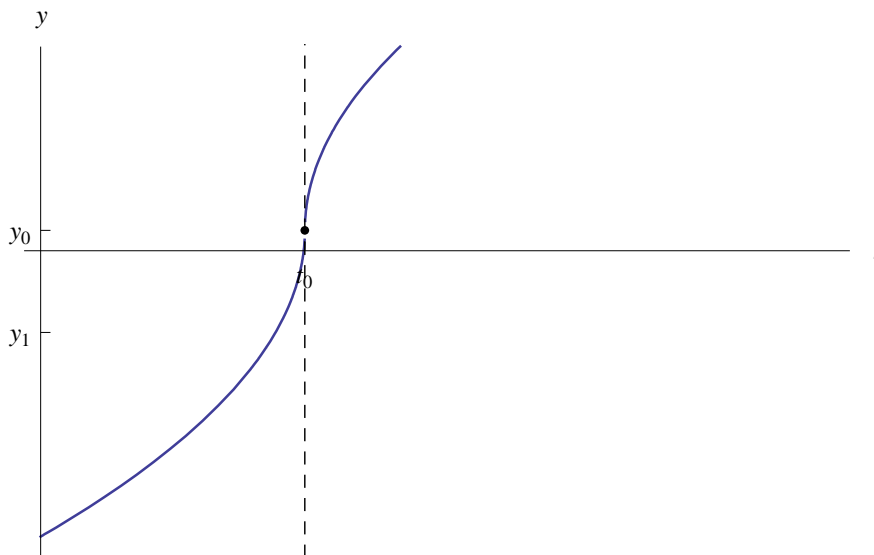


Figura 6.1: Grafico dell'ordinata y della particella in funzione del tempo. Il punto (t_0, y_0) è un punto di flesso a tangente verticale (tracciata in tratteggio).

Eliminando il parametro t tra le (6.1), otteniamo la rappresentazione ordinaria della traiettoria, cioè $\gamma_{++} : y = f(x)$, dove:

$$f(x) = \begin{cases} y_0 + \eta_0 v_0^{-1/2} \sqrt{x - x_0}, & \text{se } x \geq x_0 \\ y_0 - \eta_0 v_0^{-1/2} \sqrt{x_0 - x}, & \text{se } 0 \leq x < x_0 \end{cases}, \quad (6.9)$$

essendo $x_0 \stackrel{def}{=} x(t_0)$. La cui derivata prima della funzione (6.9) è:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\eta_0 v_0^{-1/2}}{2\sqrt{x-x_0}}, & \text{se } x > x_0 \\ \frac{\eta_0 v_0^{-1/2}}{2\sqrt{x_0-x}}, & \text{se } 0 \leq x < x_0 \end{cases},$$

Cioè

$$f'(x) = \frac{\eta_0 v_0^{-1/2}}{2\sqrt{|x - x_0|}},$$

avendosi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = +\infty$$

Ne consegue che $P_0(x_0, y_0)$ è un punto di flesso a tangente verticale per γ_{++} . Inoltre:

$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in [0, +\infty) - \{x_0\}$$

Ciò implica che f è strettamente crescente in $[0, +\infty)$. La derivata seconda è:

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{\eta_0 v_0^{-1/2}}{4\sqrt{(x-x_0)^3}}, & \text{se } x > x_0 \\ \frac{\eta_0 v_0^{-1/2}}{4\sqrt{(x_0-x)^3}}, & \text{se } 0 \leq x < x_0 \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned} f''(x) &> 0, \quad \forall x \in [0, x_0) \\ f''(x) &< 0, \quad \forall x \in (x_0, +\infty) \end{aligned}$$

Significa che γ_{++} è concavo verso l'alto in $[0, x_0)$, concavo verso il basso in $(x_0, +\infty)$. Riguardo al comportamento all'infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

per cui la funzione diverge positivamente per $x \rightarrow +\infty$, mentre il grafico è privo di asintoti obliqui, giacchè $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Per ultimo:

$$f(0) = y_0 - \eta_0 v_0^{-1/2} \sqrt{x_0} = y_0 - \eta_0 \sqrt{t_0} = y_1,$$

cioè $f(0) = y_1$, dove y_1 è dato dalla (6.6). Inoltre:

$$f(x) = 0 \iff x = x_0 - v_0 \left(\frac{y_0}{\eta_0} \right)^2 \stackrel{\text{def}}{=} x_1$$

Significa che γ_{++} interseca l'asse x nel punto di ascissa x_1 . L'analisi eseguita ci consente di tracciare la traiettoria della particella (cfr. fig. 6.2).

Il vettore velocità della particella è:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{x}(t) \mathbf{i} + \dot{y}(t) \mathbf{j} \tag{6.10}$$

essendo \mathbf{i} e \mathbf{j} i versori degli assi coordinati. Abbiamo

$$\mathbf{v}(t) = v_0 \mathbf{i} + \frac{\eta_0}{2\sqrt{|t-t_0|}} \mathbf{j} = \begin{cases} v_0 \mathbf{i} + \frac{\eta_0}{2\sqrt{t_0-t}} \mathbf{j}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \\ v_0 \mathbf{i} + \frac{\eta_0}{2\sqrt{t-t_0}} \mathbf{j}, & \text{se } t > t_0 \end{cases} \tag{6.11}$$

Si osservi che il moto componente secondo la direzione dell'asse x è uniforme, poichè avviene a velocità costante il cui modulo è $v_0 > 0$. Si tratta, in particolare, di un moto progressivo in quanto la particella si sposta nella direzione positiva dell'asse x . Per contro, il moto componente lungo l'asse y è accelerato per $t \in [0, t_0)$, giacchè $\dot{y}(t) > 0$ in tale intervallo, mentre è decelerato per $t > t_0$ ($\dot{y}(t) < 0, \forall t > t_0$). Inoltre, la funzione vettoriale (7.13) della variabile reale t , ha il seguente comportamento:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{v}(t) = v_0 \mathbf{i} + (+\infty) \mathbf{j}$$

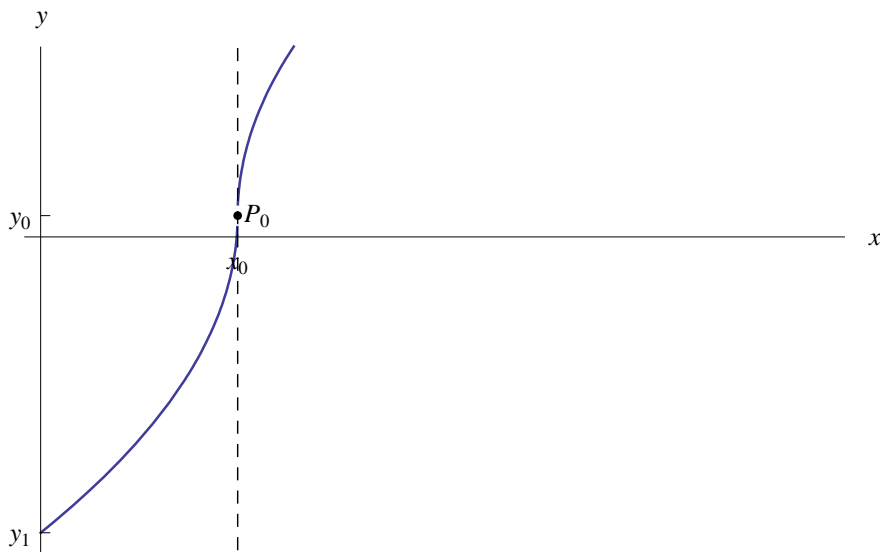


Figura 6.2: Traiettorie della particella.

Infatti, per quanto precede, la componente secondo l'asse y , della funzione $\mathbf{v}(t)$ diverge positivamente per $t \rightarrow t_0$. Ciò implica che quando la particella transita per $P_0(x_0, y_0)$, la componente v_y della velocità tende a $+\infty$, ed è chiaro che l'accelerazione è altrettanto infinita. Più precisamente:

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{x}(t) \mathbf{i} + \ddot{y}(t) \mathbf{j} \quad (6.12)$$

Tenendo conto delle (6.8):

$$\mathbf{a}(t) = \begin{cases} \frac{\eta_0}{4\sqrt{(t_0-t)^3}} \mathbf{j}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \\ -\frac{\eta_0}{4\sqrt{(t-t_0)^3}} \mathbf{j}, & \text{se } t > t_0 \end{cases} \quad (6.13)$$

In fig. 6.3 sono riportati i grafici delle funzioni $\dot{y}(t)$ e $\ddot{y}(t)$.

Se m è la massa della particella, la forza agente su di essa è:

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$$

Cioè

$$\mathbf{F}(t) = \begin{cases} \frac{m\eta_0}{4\sqrt{(t_0-t)^3}} \mathbf{j}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \\ -\frac{m\eta_0}{4\sqrt{(t-t_0)^3}} \mathbf{j}, & \text{se } t > t_0 \end{cases} \quad (6.14)$$

Dalla $y(t) = y_0 + \eta_0\sqrt{t_0-t}$ (valida per $t < t_0$) ricaviamo

$$\sqrt{t_0-t} = \frac{y_0 - y}{\eta_0}, \quad \forall y \in (-\infty, y_0]$$

Dalla $y(t) = y_0 - \eta_0\sqrt{t-t_0}$ (valida per $t \geq t_0$) ricaviamo

$$\sqrt{t-t_0} = \frac{y - y_0}{\eta_0}, \quad \forall y \in [y_0, +\infty)$$

Sostituendo le formule trovate nella (6.14):

$$\mathbf{F}(y) = \begin{cases} \frac{m\eta_0^4}{4(y_0-y)^3} \mathbf{j}, & \text{se } -\infty < y < y_0 \\ -\frac{m\eta_0^4}{4(y-y_0)^3} \mathbf{j}, & \text{se } y > y_0 \end{cases} \quad (6.15)$$

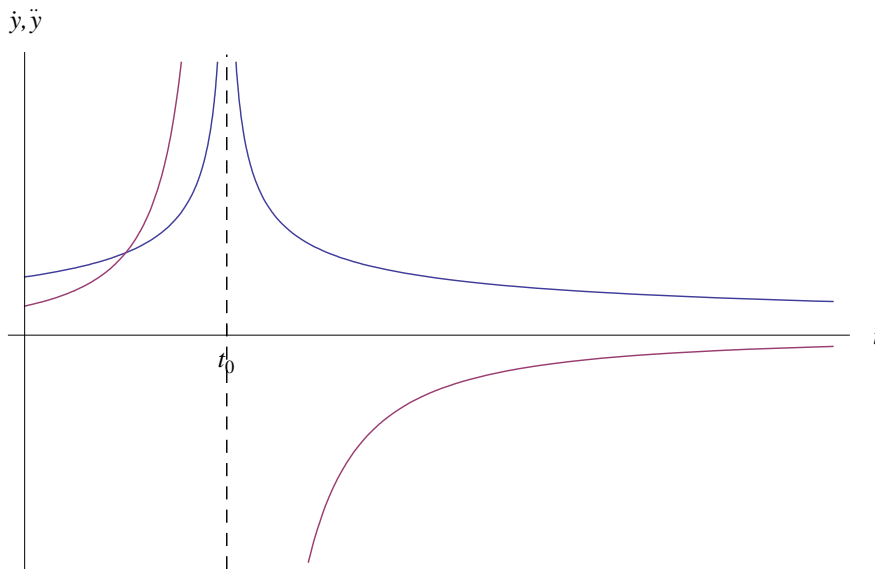


Figura 6.3: La curva blu è l'andamento della componente $v_y = \dot{y}$ della velocità in funzione del tempo, mentre l'altra curva è il grafico della componente $a_y = \ddot{y}$ dell'accelerazione.

Cioè la forza agente sulla particella è posizionale, e come tale deriva da un potenziale U e quindi da un'energia potenziale $V = -U$ tale che

$$\mathbf{F}(y) = \nabla U = -\nabla V,$$

osservando che \mathbf{F} dipende dalla sola variabile y :

$$\mathbf{F}(y) = -\frac{dV(y)}{dy} \mathbf{j},$$

Per $-\infty < y < y_0$ troviamo:

$$\frac{dV(y)}{dy} = -\frac{m\eta_0^4}{4(y_0 - y)^3}$$

Cioè

$$\begin{aligned} V(y) &= -\frac{m\eta_0^4}{4} \int (y_0 - y)^{-3} dy = \frac{m\eta_0^4}{4} \int (y_0 - y)^{-3} d(y - y_0) \\ &= -\frac{m\eta_0^4}{8(y_0 - y)^2} + V_0 \end{aligned}$$

Un qualunque campo scalare di energia potenziale deve annullarsi all'infinito nelle coordinate spaziali:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} V(y) = 0 \implies V_0 = 0$$

Pertanto:

$$V(y) = -\frac{m\eta_0^4}{8(y_0 - y)^2}, \quad \forall y \in (-\infty, y_0) \quad (6.16)$$

Per $-\infty < y < y_0$ troviamo:

$$\frac{dV(y)}{dy} = \frac{m\eta_0^4}{4(y_0 - y)^3}$$

Cioè

$$\begin{aligned} V(y) &= -\frac{m\eta_0^4}{4} \int (y - y_0)^{-3} dy \\ &= -\frac{m\eta_0^4}{8(y - y_0)^2} + V'_0 \end{aligned}$$

Ma

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} V(y) = 0 \implies V'_0 = 0$$

Pertanto:

$$V(y) = -\frac{m\eta_0^4}{8(y - y_0)^2}, \quad \forall y \in (y_0, +\infty) \quad (6.17)$$

Le (6.16)-(6.17) si riuniscono in un'unica equazione:

$$V(y) = -\frac{m\eta_0^4}{8(y - y_0)^2}, \quad \forall y \in \mathbb{R} - \{y_0\}, \quad (6.18)$$

che è una buca di potenziale infinitamente profonda come riportato in fig. 7.5.

Riepilogando: man mano che la particella si avvicina alla singolarità $P_0(x_0, y_0)$, il campo diviene progressivamente più intenso e tale sarà il modulo della forza che ne deriva. Quest'ultima incurverà la traiettoria fino a quando ($t \rightarrow t_0 \implies |\mathbf{F}(t)| \rightarrow +\infty$) questa risulterà essere tangente alla retta verticale $x = x_0$. Qui il vettore velocità avrà modulo infinito con orientamento verso l'alto. Si badi che tale configurazione cinematica contraddice uno dei postulati della Relatività Speciale, secondo cui l'estremo superiore dell'insieme \mathcal{V} dei valori assunti dalla velocità di particelle massive è pari a c i.e. velocità della luce nel vuoto ($< +\infty$):

$$c = \sup \mathcal{V} < +\infty$$

Capitolo 7

Interpretazione cinematica dei punti cuspidali

7.1 Moto piano di una particella

Consideriamo una particella di massa m che compie un moto piano lungo una traiettoria γ_+ di rappresentazione parametrica:

$$x(t) = v_0 t, \quad y(t) = y_0 + \eta_0 \sqrt{|t - t_0|}, \quad t \in [0, +\infty), \quad (7.1)$$

essendo t il tempo, mentre $v_0 > 0$ e $\eta_0 > 0$ sono due costanti con le appropriate dimensioni¹. Il numero reale $t_0 > 0$ è, invece, un istante assegnato da non confondere con l'istante iniziale che è $t = 0$. La traiettoria γ_+ non è una curva regolare poiché $y(t)$ ha una discontinuità di seconda specie in t_0 . Infatti:

$$y(t) = \begin{cases} y_0 + \eta_0 \sqrt{t - t_0}, & \text{se } t \geq t_0 \\ y_0 + \eta_0 \sqrt{t_0 - t}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \end{cases}, \quad (7.2)$$

onde:

$$\dot{y}(t) = \begin{cases} \frac{\eta_0}{2\sqrt{t-t_0}}, & \text{se } t > t_0 \\ -\frac{\eta_0}{2\sqrt{t_0-t}}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \end{cases} \quad (7.3)$$

La derivata prima è definita in $[0, t_0) \cup (t_0, +\infty)$, ed eseguendo il limite per $t \rightarrow t_0$:

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \dot{y}(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow t_0^+} \dot{y}(t) = +\infty, \quad (7.4)$$

da cui la natura cuspidale del punto $(t_0, y_0) \in \Gamma_y : y = y(t)$. Studiamo ora la funzione $y(t)$.

Insieme di definizione

La funzione (7.2) è definita in \mathbb{R} , ma dal momento che il tempo t è non negativo, consideriamo la restrizione a $[0, +\infty)$ in accordo con la (7.1).

Studio del segno

Risulta $y(t) \geq 0, \forall t \in [0, +\infty)$, per cui Γ_y è contenuto nel primo quadrante.

Intersezione con gli assi

$$y(t) = 0 \iff \sqrt{|t - t_0|} = -\frac{y_0}{\eta_0} \quad \text{mai!} \quad (7.5)$$

¹In particolare, v_0 è la componente della velocità \mathbf{v} della particella nella direzione dell'asse x .

giacchè è $y_0, \eta_0 > 0$. Ne consegue che Γ_y non interseca l'asse delle ascisse.

$$y(0) = y_0 + \eta_0 \sqrt{t_0} \stackrel{\text{def}}{=} y_1 > y_0 \quad (7.6)$$

Cioè Γ_y interseca l'asse delle ordinate nel punto $(0, y_1)$.

Studio della derivata prima

Dalle (7.3) vediamo che

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) > 0 &\iff t > t_0 \\ 0 \leq t < t_0 &\implies \dot{y}(t) < 0 \end{aligned} \quad (7.7)$$

Cioè la funzione $y(t)$ è strettamente crescente in $(t_0, +\infty)$ e strettamente decrescente in $(0, t_0)$.

Derivata seconda

$$\ddot{y}(t) = \begin{cases} -\frac{\eta_0}{4\sqrt{(t-t_0)^3}}, & \text{se } t > t_0 \\ -\frac{\eta_0}{4\sqrt{(t_0-t)^3}}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \end{cases} \quad (7.8)$$

Riesce

$$\ddot{y}(t) = -\frac{\eta_0}{4\sqrt{|t-t_0|^3}} < 0, \quad \forall t \in [0, t_0) \cup (t_0, +\infty)$$

Ne consegue che $\Gamma_y : y = y(t)$ volge la concavità verso il basso.

Comportamento all'infinito. Asintoti obliqui

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$$

Inoltre:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{y}(t) = 0,$$

per cui il grafico Γ_y è privo di asintoti obliqui.

Dalle (7.7) emerge che il punto cuspidale (t_0, y_0) è punto di minimo assoluto per la funzione $y(t)$.

Tracciamento del grafico

A questo punto siamo in grado di tracciare il grafico Γ_y , come illustrato in fig. 7.1.

Eliminando il parametro t tra le (7.1), otteniamo la rappresentazione ordinaria della traiettoria, cioè $\gamma_+ : y = f(x)$, dove:

$$f(x) = y_0 + \eta_0 v_0^{-1/2} \sqrt{|x - x_0|}, \quad \forall x \in [0, +\infty) \quad (7.9)$$

essendo $x_0 \stackrel{\text{def}}{=} x(t_0)$. Svincoliamoci dal valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} y_0 + \eta_0 v_0^{-1/2} \sqrt{x - x_0}, & \text{se } x \geq x_0 \\ y_0 + \eta_0 v_0^{-1/2} \sqrt{x_0 - x}, & \text{se } 0 \leq x < x_0 \end{cases}, \quad (7.10)$$

la cui derivata prima è:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\eta_0 v_0^{-1/2}}{2\sqrt{x-x_0}}, & \text{se } x > x_0 \\ -\frac{\eta_0 v_0^{-1/2}}{2\sqrt{x_0-x}}, & \text{se } 0 \leq x < x_0 \end{cases}, \quad (7.11)$$

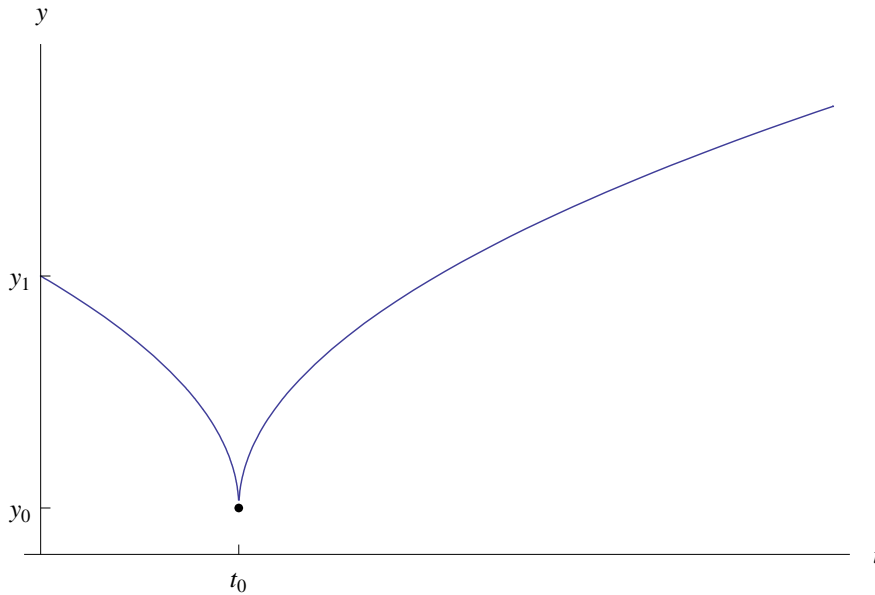


Figura 7.1: Grafico dell'ordinata y della particella in funzione del tempo. Il punto (t_0, y_0) è una cuspidale.

avendosi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = +\infty$$

Ne consegue che $P_0(x_0, y_0)$ è un punto cuspidale per γ_+ . Inoltre:

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0, \quad \forall x \in (x_0, +\infty) \\ f'(x) &< 0, \quad \forall x \in [0, x_0) \end{aligned}$$

Ciò implica la stretta crescita di $f(x)$ in $(x_0, +\infty)$, mentre la funzione è strettamente decrescente in $(0, x_0)$. È facile persuadersi che $f''(x) < 0$, $\forall x \in (0, +\infty) - \{x_0\}$. Il comportamento agli estremi del campo di esistenza è:

$$f(0) = y_0 + \eta_0 v_0^{1/2} \sqrt{x_0} = y_0 + \eta_0 \sqrt{t_0},$$

cioè $f(0) = y_1$, dove y_1 è dato dalla (7.6). Inoltre:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

per cui la funzione diverge positivamente per $x \rightarrow +\infty$, mentre il grafico è privo di asintoti obliqui, giacchè $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

L'analisi eseguita ci consente di tracciare la traiettoria della particella (cfr. fig. 7.2).

Il vettore velocità della particella è:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{x}(t) \mathbf{i} + \dot{y}(t) \mathbf{j} \quad (7.12)$$

essendo \mathbf{i} e \mathbf{j} i versori degli assi coordinati. Abbiamo

$$\mathbf{v}(t) = \begin{cases} v_0 \mathbf{i} - \frac{\eta_0}{2\sqrt{t_0-t}} \mathbf{j}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \\ v_0 \mathbf{i} + \frac{\eta_0}{2\sqrt{t-t_0}} \mathbf{j}, & \text{se } t > t_0 \end{cases} \quad (7.13)$$

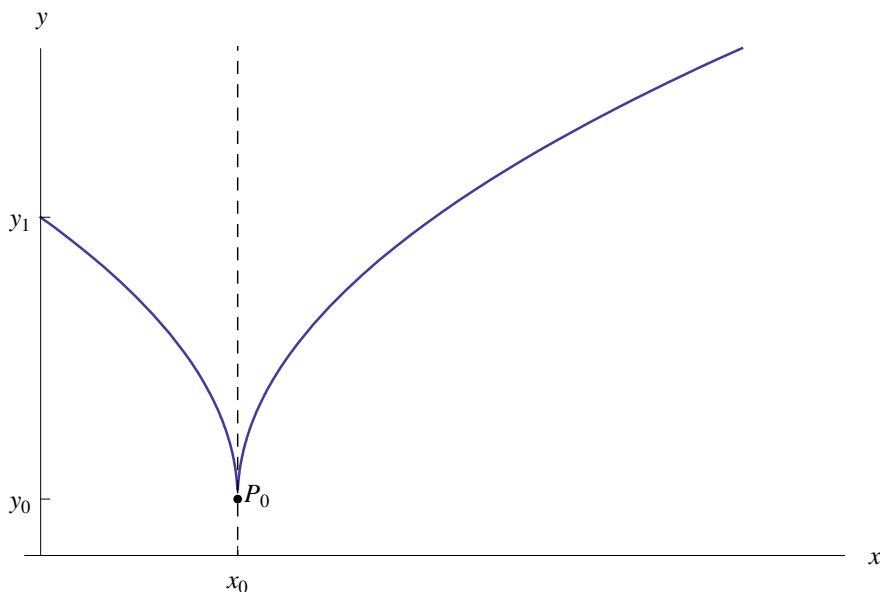


Figura 7.2: Traiettoria della particella.

Si osservi che il moto componente secondo la direzione dell'asse x è uniforme, poichè avviene a velocità costante il cui modulo è $v_0 > 0$. Si tratta, in particolare, di un moto progressivo in quanto la particella si sposta nella direzione positiva dell'asse x . Per contro, il moto componente lungo l'asse y è decelerato, giacchè $\ddot{y}(t) < 0$. Tale moto è regressivo per $t < t_0$, per poi divenire progressivo a ogni $t > t_0$. Inoltre, la funzione vettoriale (7.13) della variabile reale t , ha il seguente comportamento:

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \mathbf{v}(t) = v_0 \mathbf{i} + (-\infty) \mathbf{j}, \quad \lim_{t \rightarrow t_0^+} \mathbf{v}(t) = v_0 \mathbf{i} + (+\infty) \mathbf{j}$$

Infatti, per quanto precede, la componente secondo l'asse y , della funzione $\mathbf{v}(t)$ diverge negativamente per $t \rightarrow t_0^-$, positivamente per $t \rightarrow t_0^+$. Ciò implica che quando la particella transita per $P_0(x_0, y_0)$, la componente v_y della velocità passa istantaneamente da $-\infty$ a $+\infty$, ed è chiaro che l'accelerazione è altrettanto infinita². Più precisamente:

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{x}(t) \mathbf{i} + \ddot{y}(t) \mathbf{j} \tag{7.14}$$

Tenendo conto delle (7.8):

$$\mathbf{a}(t) = \begin{cases} -\frac{\eta_0}{4\sqrt{(t_0-t)^3}} \mathbf{j}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \\ -\frac{\eta_0}{4\sqrt{(t-t_0)^3}} \mathbf{j}, & \text{se } t > t_0 \end{cases}, \tag{7.15}$$

o ciò che è lo stesso

$$\mathbf{a}(t) = -\frac{\eta_0}{4\sqrt{|t-t_0|^3}} \mathbf{j} \tag{7.16}$$

In fig. 7.3 sono riportati i grafici delle funzioni $\dot{y}(t)$ e $\ddot{y}(t)$.

²Per $t \rightarrow t_0$, la variazione istantanea della componente $v_y(t) = \dot{y}(t)$ della velocità da $-\infty$ a $+\infty$, sembrerebbe produrre un'accelerazione divergente a $+\infty$. In realtà, l'accelerazione diverge negativamente poichè $v_y(t)$ risulta essere strettamente decrescente in ogni intorno di t_0 (cfr. grafico della fig. 7.3).

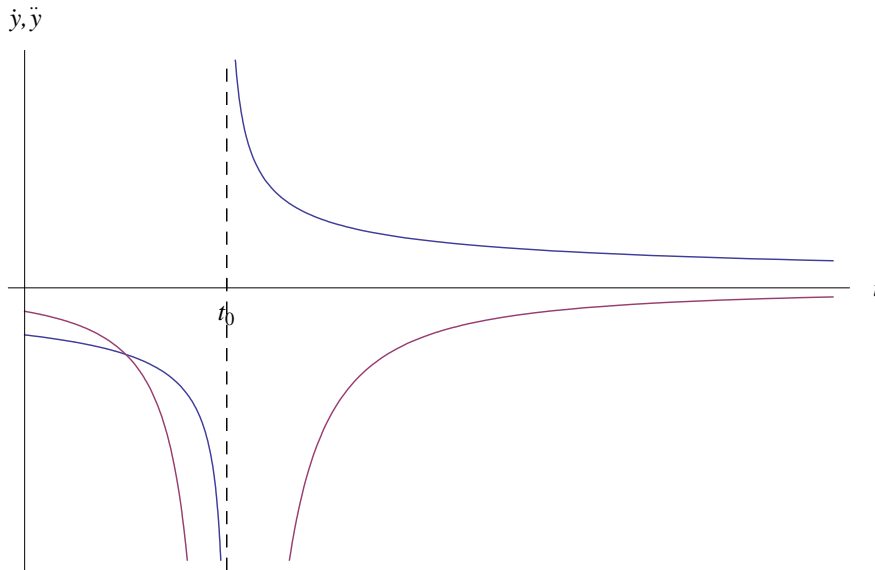


Figura 7.3: La curva blu è l'andamento della componente $v_y = \dot{y}$ della velocità in funzione del tempo, mentre l'altra curva è il grafico della componente $a_y = \ddot{y}$ dell'accelerazione.

Se m è la massa della particella, la forza agente su di essa è:

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$$

Cioè

$$\mathbf{F}(t) = -\frac{m\eta_0}{4\sqrt{|t-t_0|^3}}\mathbf{j} \quad (7.17)$$

Dalla $y(t) = y_0 + \eta_0\sqrt{|t-t_0|}$ ricaviamo

$$\sqrt{|t-t_0|} = \frac{y-y_0}{\eta_0}, \quad \forall y \in [y_0, +\infty),$$

per sostituirla nella (7.17):

$$\mathbf{F}(y) = -\frac{m\eta_0^4}{4(y-y_0)^3}\mathbf{j}, \quad \forall y \in (y_0, +\infty) \quad (7.18)$$

Cioè la forza agente sulla particella è posizionale, e come tale deriva da un potenziale U e quindi da un'energia potenziale $V = -U$ tale che

$$\mathbf{F}(y) = \nabla U = -\nabla V,$$

osservando che \mathbf{F} dipende dalla sola variabile y :

$$\mathbf{F}(y) = -\frac{dV(y)}{dy}\mathbf{j},$$

per cui

$$\begin{aligned} V(y) &= \frac{m\eta_0^4}{4} \int \frac{dy}{(y-y_0)^3} \\ &= -\frac{m\eta_0^4}{8(y-y_0)^2} + V_0, \quad \forall y \in (y_0, +\infty) \end{aligned}$$

Un qualunque campo si annulla all'infinito, onde:

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} V(y) = 0 \implies V_0 = 0$$

Quindi:

$$V(y) = -\frac{m\eta_0^4}{8(y-y_0)^2}, \quad \forall y \in (y_0, +\infty) \quad (7.19)$$

Riepilogando: man mano che la particella si avvicina alla singolarità $P_0(x_0, y_0)$, il campo diviene progressivamente più intenso e tale sarà il modulo della forza che ne deriva. Quest'ultima incurverà la traiettoria fino a quando ($t \rightarrow t_0 \implies |\mathbf{F}(t)| \rightarrow +\infty$) questa risulterà essere tangente alla retta verticale $x = x_0$. Qui il vettore velocità avrà modulo infinito con orientamento verso il basso, per invertire istantaneamente il verso, conservando la direzione. Per tale ragione, il punto cuspidale $P_0(x_0, y_0)$ è anche denominato *punto di regresso* (*rebroussment* [2]). Si badi che tale configurazione cinematica contraddice uno dei postulati della Relatività Speciale, secondo cui l'estremo superiore dell'insieme \mathcal{V} dei valori assunti dalla velocità di particelle massive è pari a c i.e. velocità della luce nel vuoto ($< +\infty$):

$$c = \sup \mathcal{V} < +\infty$$

Consideriamo ora la traiettoria γ_- di rappresentazione parametrica:

$$x(t) = v_0 t, \quad y(t) = y_0 - \eta_0 \sqrt{|t - t_0|}, \quad t \in [0, +\infty) \quad (7.20)$$

Studiando la funzione $y(t) = y_0 - \eta_0 \sqrt{|t - t_0|}$ si perviene al grafico riportato in fig. 7.4.

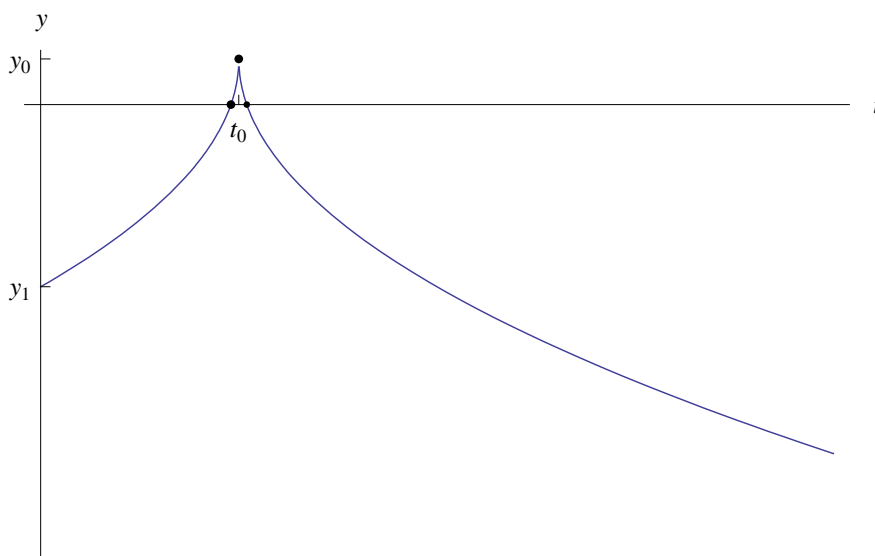


Figura 7.4: Andamento dell'ordinata $y = y_0 - \eta_0 \sqrt{|t - t_0|}$ in funzione del tempo t . In questo caso, il diagramma orario interseca l'asse delle ascisse nei punti $t_{1,2} = t_0 \mp \left(\frac{y_0}{\eta_0}\right)^2$. Il diagramma interseca l'asse delle ordinate nel punto di ordinata $y_1 = y_0 - \eta_0 \sqrt{t_0}$.

Riportiamo di seguito le derivate – prima e seconda – della $y(t)$:

$$\dot{y}(t) = \begin{cases} -\frac{\eta_0}{2\sqrt{t-t_0}}, & \text{se } t > t_0 \\ \frac{\eta_0}{2\sqrt{t_0-t}}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \end{cases} \quad (7.21)$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{\eta_0}{4\sqrt{|t-t_0|^3}}$$

Quindi il vettore velocità:

$$\mathbf{v}(t) = \begin{cases} v_0\mathbf{i} + \frac{\eta_0}{2\sqrt{t_0-t}}\mathbf{j}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \\ v_0\mathbf{i} - \frac{\eta_0}{2\sqrt{t-t_0}}\mathbf{j}, & \text{se } t > t_0 \end{cases}, \quad (7.22)$$

e il vettore accelerazione:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\eta_0}{4\sqrt{|t-t_0|^3}}\mathbf{j} \quad (7.23)$$

E la forza:

$$\mathbf{F}(t) = \frac{m\eta_0}{4\sqrt{|t-t_0|^3}}\mathbf{j} \quad (7.24)$$

In questo caso la velocità ha il seguente comportamento:

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \mathbf{v}(t) = v_0\mathbf{i} + (+\infty)\mathbf{j}, \quad \lim_{t \rightarrow t_0^+} \mathbf{v}(t) = v_0\mathbf{i} + (-\infty)\mathbf{j}$$

da cui vediamo che transitando per la cuspidale, la componente v_y del vettore velocità passa istantaneamente da $+\infty$ a $-\infty$. Svincoliamoci dalla variabile t ricavando dalla $y(t) = y_0 - \eta_0\sqrt{|t-t_0|}$

$$\sqrt{|t-t_0|} = \frac{y_0 - y}{\eta_0}, \quad \forall y \in (-\infty, y_0),$$

che sostituita nella (7.24) porge

$$\mathbf{F}(y) = \frac{m\eta_0^4}{4(y_0 - y)^3}\mathbf{j}, \quad \forall y \in (-\infty, y_0) \quad (7.25)$$

L'energia potenziale del campo $\mathbf{F}(y)$ è

$$\begin{aligned} V(y) &= -\frac{m\eta_0^4}{4} \int (y_0 - y)^{-3} dy \\ &= -\frac{m\eta_0^4}{8(y_0 - y)^2} + V'_0, \quad \forall y \in (-\infty, y_0) \end{aligned}$$

Al solito, il campo si annulla all'infinito:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} V(y) = 0,$$

onde $V'_0 = 0$. Quindi:

$$V(y) = -\frac{m\eta_0^4}{8(y_0 - y)^2}, \quad \forall y \in (-\infty, 0) \quad (7.26)$$

Le (7.19)-(7.26) si riuniscono in un'unica equazione:

$$V(y) = -\frac{m\eta_0^4}{8(y - y_0)^2}, \quad \forall y \in \mathbb{R} - \{y_0\}, \quad (7.27)$$

che è una buca di potenziale infinitamente profonda come riportato in fig. 7.5.

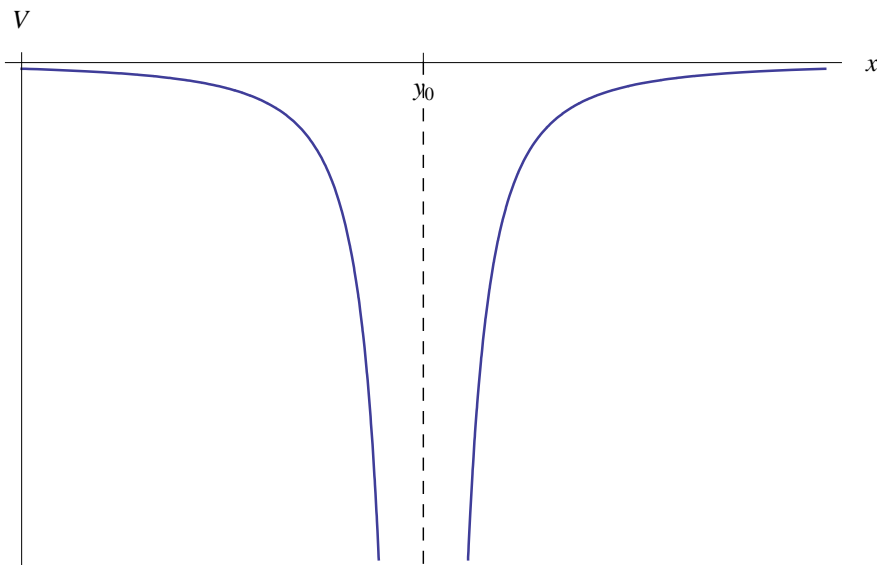


Figura 7.5: Buca di potenziale infinitamente profonda.

Per quanto riguarda l'espressione analitica della forza agente sulla particella, le (7.18)-(7.25) si riuniscono nell'unica espressione:

$$\mathbf{F}(y) = -\frac{m\eta_0^4}{4|y - y_0|^3} \mathbf{j}$$

Ne consegue che le traiettorie γ_{\pm} sono le curve integrali del sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -\frac{\eta_0^4}{4|y - y_0|^3} \end{cases} \quad (7.28)$$

Le condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \\ y(0) &= y_1 > 0, \quad \dot{y}(0) = -\frac{\eta_0}{2\sqrt{t_0}} \end{aligned}$$

danno luogo alla traiettoria γ_+ . L'ordinata y_1 è fissata dai parametri $\eta_0 > 0, t_0 > 0$, giacchè $y_1 = y_0 + \eta_0\sqrt{t_0}$. Le condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \\ y(0) &= y_1 < 0, \quad \dot{y}(0) = \frac{\eta_0}{2\sqrt{t_0}} \end{aligned}$$

danno luogo alla traiettoria γ_- . Si noti che anche qui l'ordinata y_1 è fissata dai parametri $\eta_0 > 0, t_0 > 0$, avendosi $y_1 = y_0 - \eta_0\sqrt{t_0}$.

Capitolo 8

Derivata di funzioni con discontinuità di prima specie. La funzione delta di Dirac

8.1 La derivata della funzione gradino unitario

La *funzione gradino unitario* (*unit step* o *funzione di Heaviside*) è così definita¹:

$$U(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (8.1)$$

Tale funzione presenta una discontinuità di prima specie in $x_0 = 0$, in quanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} U(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} U(x) = 0, \quad (8.2)$$

con salto di discontinuità

$$s(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} U(x) - \lim_{x \rightarrow 0^-} U(x) = +1 \quad (8.3)$$

In fig. 8.1 riportiamo il grafico di $U(x)$.

Il rapporto incrementale di $U(x)$ relativo al punto $x_0 = 0$ è:

$$\left(\frac{\Delta U}{\Delta x} \right)_{x_0=0} = \frac{U(\Delta x) - U(0)}{\Delta x} = \frac{U(\Delta x) - 1}{\Delta x} = \begin{cases} 0, & \text{se } \Delta x > 0 \\ -\frac{1}{\Delta x}, & \text{se } \Delta x < 0 \end{cases}, \quad (8.4)$$

onde:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\Delta U}{\Delta x} \right)_{x_0=0} = 0, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\Delta U}{\Delta x} \right)_{x_0=0} = +\infty \quad (8.5)$$

Il rapporto incrementale (8.4) è graficato in fig. 8.2.

D'altra parte:

$$U'(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Per quanto precede, $U(x)$ non è derivabile in $x_0 = 0$, avendosi dalle (8.5):

$$U'_+(0) = 0, \quad U'_-(0) = +\infty \quad (8.6)$$

¹In realtà la funzione di Heaviside è $\theta(x > 0) = 1$, $\theta(x < 0) = 0$, per cui non è definita in $x = 0$. Ma con questa definizione non possiamo scrivere il rapporto incrementale relativo a tale punto.

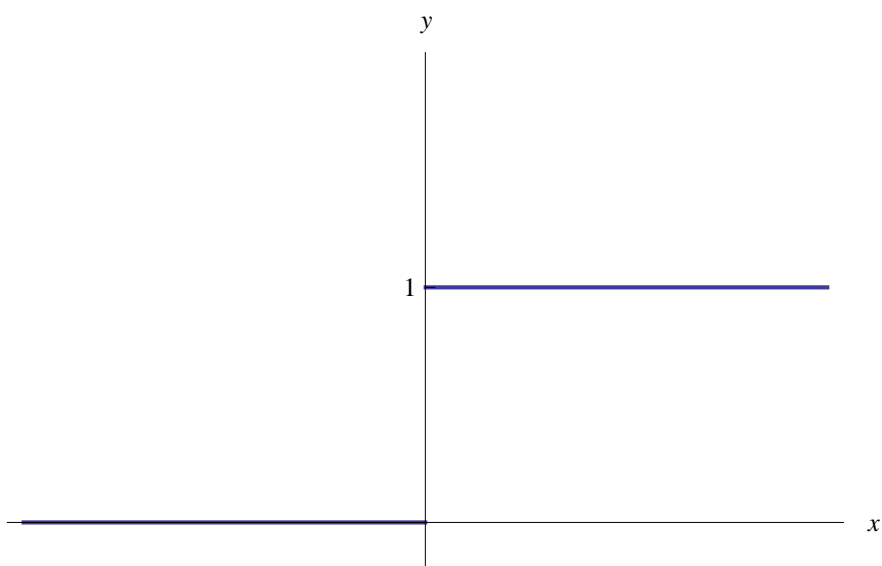


Figura 8.1: Grafico della funzione unit step (cfr. eq. (8.1))

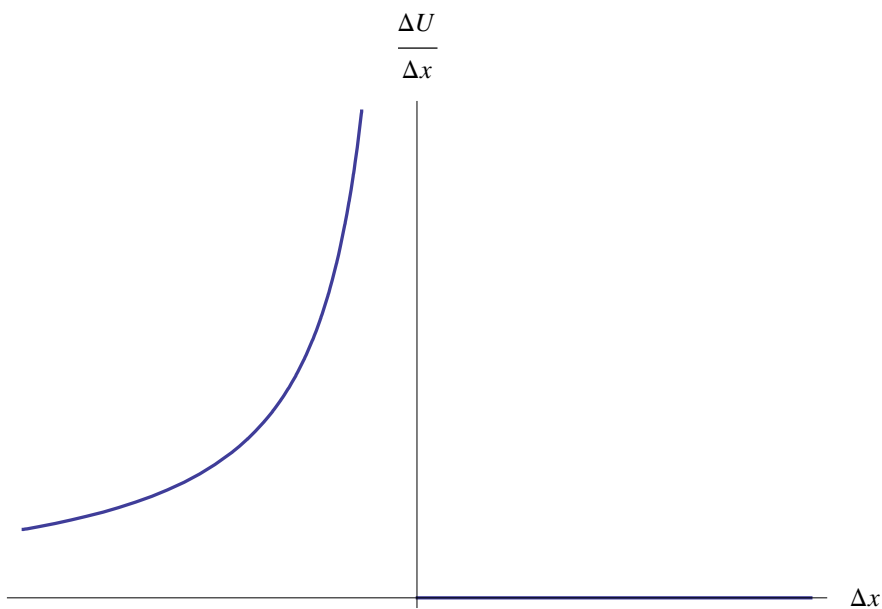


Figura 8.2: Grafico del rapporto incrementale della unitstep, relativo al punto $x_0 = 0$.

Le (8.6) sono intuitivamente ovvie, poichè il salto di discontinuità di $U(x)$ in $x_0 = 0$ è $+1$ (cfr. eq. 8.3). In altri termini, per $\Delta x \rightarrow 0^-$, la funzione “salta” da 0 a 1, per cui la derivata sinistra è $+\infty$. Viceversa, per $\Delta x \rightarrow 0^+$ la funzione è costantemente 1, onde la derivata destra è 0. Definiamo ora la funzione:

$$f_a(x) = \frac{1}{e^{-\frac{x}{a}} + 1}, \tag{8.7}$$

essendo a un parametro reale positivo. Al variare di a in $\mathbb{R}_0^+ = (0, +\infty)$, otteniamo l'insieme di funzioni:

$$\{f_a(x)\}_{a \in \mathbb{R}_0^+}$$

Studiamo la funzione (8.7) per un assegnato valore di a .

Insieme di definizione

La funzione è definita in \mathbb{R} .

Intersezione con gli assi coordinati

$$f_a(x) = 0 \iff \frac{1}{e^{-\frac{x}{a}} + 1} = 0 \iff 1 = 0 \text{ mai!}$$

Il grafico $\gamma_a : y = f_a(x)$ non interseca l'asse x .

$$f_a(0) = \frac{1}{2},$$

per cui γ_a interseca l'asse y in $A(0, \frac{1}{2})$.

Studio del segno

$$f_a(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ne consegue che γ_a è contenuto nel semipiano $y > 0$.

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{-\frac{|x|}{a}} + 1} \stackrel{a>0}{=} \frac{1}{e^{-\infty} + 1} = \frac{1}{0^+ + 1} = 1^-,$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{\frac{|x|}{a}} + 1} = \frac{1}{e^{+\infty} + 1} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

Cioè, la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale a destra per il grafico di $f_a(x)$, mentre $y = 0$ è asintoto orizzontale a sinistra.

Studio della derivata prima

$$f'_a(x) = \frac{e^{\frac{x}{a}}}{a(1 + e^{\frac{x}{a}})^2} \tag{8.8}$$

Risulta

$$f_a(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Pertanto $f_a(x)$ è strettamente crescente.

Tracciamento del grafico

Siamo ora in grado di tracciare la curva γ_a . Più specificatamente, le figg. 8.3-8.4 confrontano il grafico di $f_a(x)$ con quello di $U(x)$, per $a = 1$ e $a = 10^{-1}$ rispettivamente.

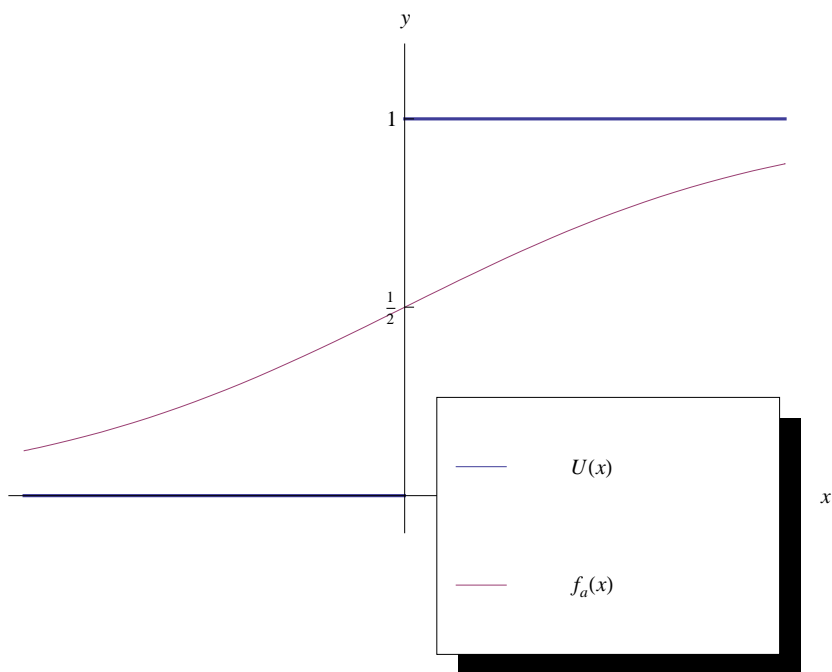


Figura 8.3: Confronto dei grafici di $U(x)$ e $f_a(x)$ per $a = 1$.

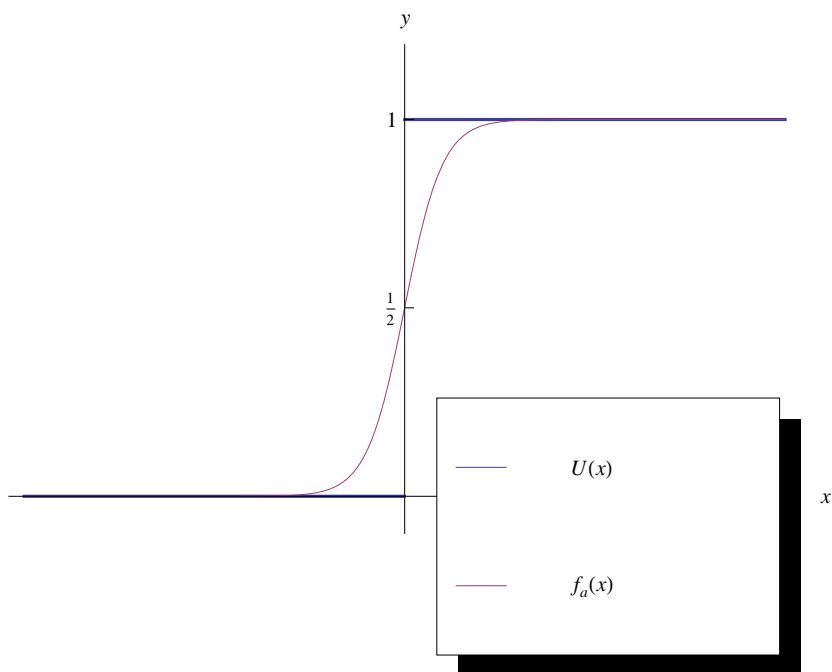


Figura 8.4: Confronto dei grafici di $U(x)$ e $f_a(x)$ per $a = 10^{-1}$.

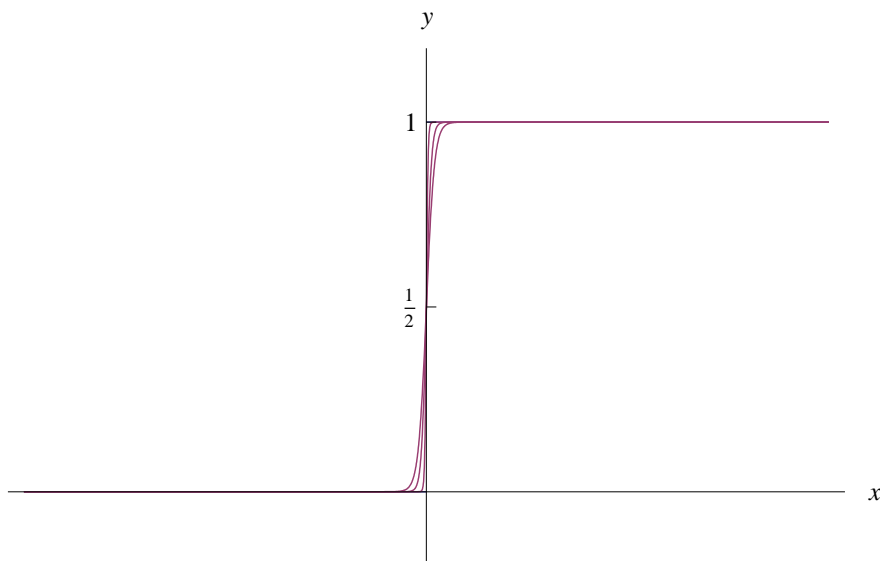


Figura 8.5: Grafico di $U(x)$ e $f_a(x)$ per a variabile da 10^{-2} a 10^{-4} con passo -4×10^{-3} .

Da tali grafici vediamo che al decrescere progressivo di $a > 0$, il grafico γ_a “si avvicina” al grafico $\gamma_u : y = U(x)$. Ciò è confermato ulteriormente dalla fig. 8.5.

Per un assegnato $x \in \mathbb{R}$, eseguiamo l’operazione di passaggio al limite per $x \rightarrow 0^+$, distinguendo i due casi: $x > 0$ e $x < 0$. \rightarrow

$$x > 0 \implies \lim_{a \rightarrow 0^+} f_a(x) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{-\frac{|x|}{a}} + 1} \stackrel{a > 0}{=} \frac{1}{e^{-\infty} + 1} = \frac{1}{0^+ + 1} = 1^- \quad (8.9)$$

$$x < 0 \implies \lim_{a \rightarrow 0^+} f_a(x) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{\frac{|x|}{a}} + 1} = \frac{1}{e^{+\infty} + 1} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

Applicando la definizione di limite, le (8.9) implicano:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \Delta_\varepsilon > 0 \mid 0 < a < \Delta_\varepsilon \implies |f_a(x) - 1| < \varepsilon, \quad \forall x \in (0, +\infty) \quad (8.10)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \Delta'_\varepsilon > 0 \mid 0 < a < \Delta'_\varepsilon \implies |f_a(x)|_{f_a(x) > 0} = f_a(x) < \varepsilon, \quad \forall x \in (-\infty, 0)$$

A loro volta, le (8.10) implicano:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon = \min \{ \Delta_\varepsilon, \Delta'_\varepsilon \} \mid 0 < a < \delta_\varepsilon \implies |f_a(x) - U(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (8.11)$$

Cioè:

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} f_a(x) = U(x) \quad (8.12)$$

A questo punto siamo tentati a scrivere:

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} f_a(x) = U(x) \implies \lim_{a \rightarrow 0^+} f'_a(x) = U'(x) \quad (8.13)$$

Ci proponiamo di esplicitare il primo membro del secondo termine dell’implicazione (8.13) per via grafica, confrontando cioè il grafico $\gamma'_a : y = f'_a(x)$ con γ_u . Non affronteremo lo studio della funzione (8.8), ma ci limitiamo a determinarne il comportamento agli estremi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'_a(x) = \frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\frac{x}{a}}}{(1 + e^{-\frac{x}{a}})^2} \stackrel{a > 0}{=} 0^+$$

Alla stessa maniera

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'_a(x) = 0^+$$

Cioè $y = 0$ è asintoto orizzontale per γ'_a a sinistra e a destra. Chiediamo a *Mathematica* di tracciarne la curva γ'_a per valori decrescenti di $a > 0$. Ad esempio, per $a = 1$ otteniamo il grafico di fig. 8.6.

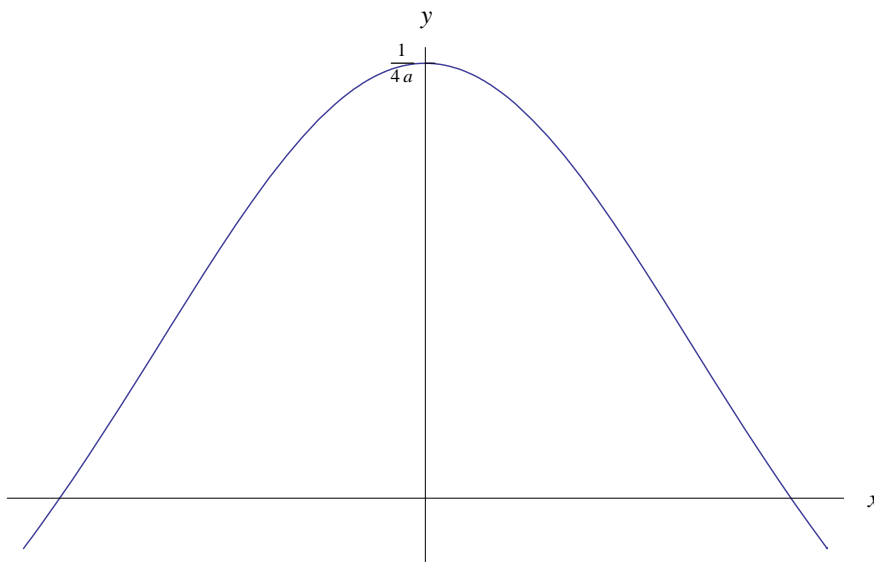


Figura 8.6: Grafico di $f'_a(x)$ per $a = 1$.

Qui vediamo che $f'_a(x)$ ha un punto di massimo assoluto in $x = 0$, risultando

$$f'_a(0) = \frac{1}{4a},$$

per cui:

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} f'_a(0) = +\infty$$

Ad esempio, per $a = 10^{-1}$ si ottiene la curva riportata in fig. 8.7.

Per completezza, riportiamo in fig. 8.8i grafici delle funzioni $\theta(x)$, $f_a(x)$, $f'_a(x)$ per $a = 10^{-1}$, mentre la fig. 8.9 confronta i grafici delle stesse funzioni per $a = 10^{-2}$.

Da tale analisi grafica segue:

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} f'_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 0 \\ +\infty, & \text{se } x = 0 \end{cases} \implies \lim_{a \rightarrow 0^+} f'_a(x) = \delta(x),$$

dove $\delta(x)$ è la funzione *impulso unitario* (*delta di Dirac*). Ne consegue che

$$\frac{d}{dx}U(x) = \delta(x) \tag{8.14}$$

Proprietà 7 *La derivata della funzione gradino unitario è l'impulso unitario.*

Osserviamo che la (8.14) si generalizza:

$$\frac{d}{dx}U(x - x_0) = \delta(x - x_0),$$

essendo x_0 un assegnato numero reale.

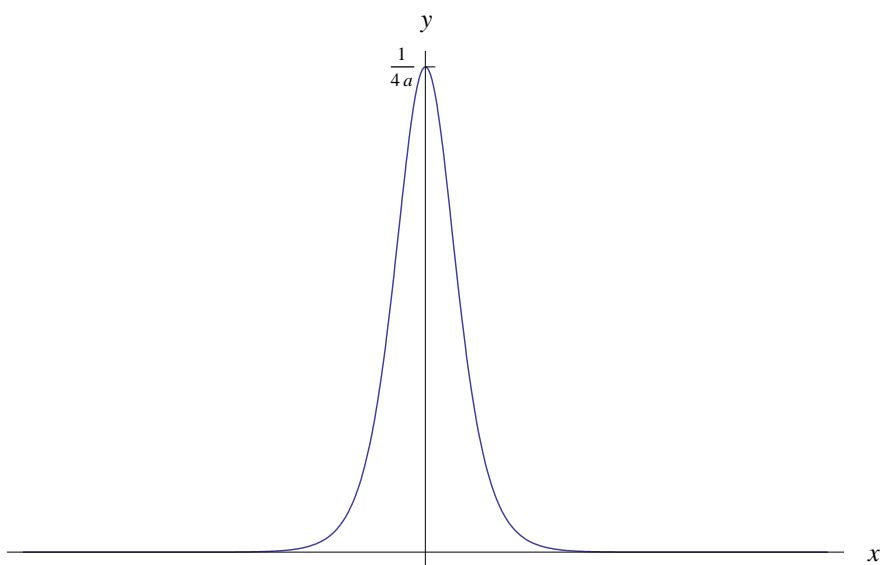


Figura 8.7: Grafico di $f'_a(x)$ per $a = 10^{-1}$.

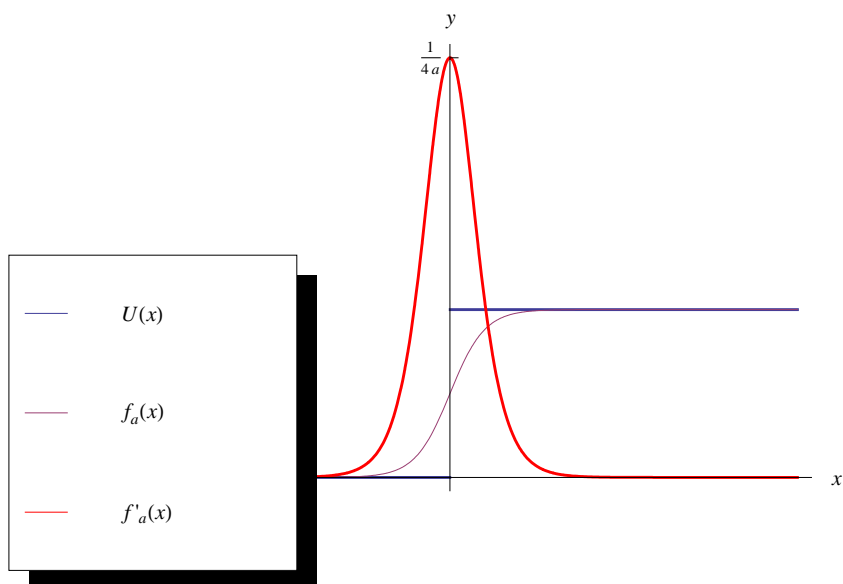


Figura 8.8: Grafico di $U(x)$, $f_{10^{-1}}(x)$ e $f'_{10^{-1}}(x)$.

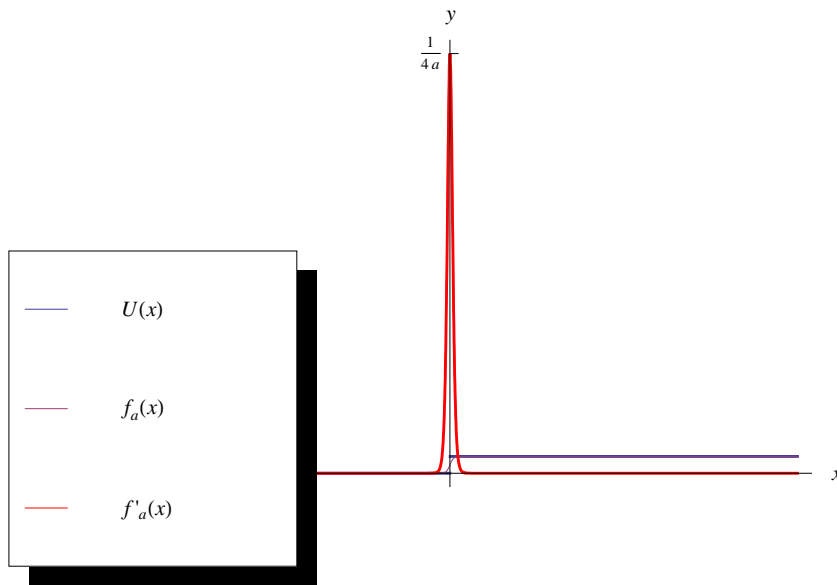


Figura 8.9: Grafico di $U(x)$, $f_{10^{-2}}(x)$ e $f'_{10^{-2}}(x)$.

8.2 La funzione di Heaviside e la funzione unit step

In precedenza abbiamo considerato coincidenti la funzione di Heaviside e la funzione unit step. In realtà, la prima è data da:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}, \tag{8.15}$$

La seconda invece:

$$U(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{8.16}$$

Tali funzioni hanno in comune il punto di discontinuità di prima specie $x = 0$, con la differenza che $U(x)$ è tale che $U(0) = 1$, mentre la funzione di Heaviside non è ivi definita. Le figg. 8.10-8.11

La circostanza $U(0) = 1$ ci permette di scrivere il rapporto incrementale relativo al punto $x = 0$, per poi arrivare a scrivere:

$$\frac{d}{dx}U(x) = \delta(x),$$

essendo $\delta(x)$ la funzione delta di Dirac. Tuttavia, nei libri di testo si trova:

$$\frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(x)$$

Inoltre, se proviamo a calcolare la derivata della unit step con *Mathematica*, otteniamo un risultato espresso in termini della *delta di Dirac discreta*. Quest'ultima è definita in funzione di p variabili intere n_1, n_2, \dots, n_p :

$$\delta^*(n_1, n_2, \dots, n_p) = \begin{cases} 1, & \text{se } n_1 = n_2 = \dots = n_p = 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{8.17}$$

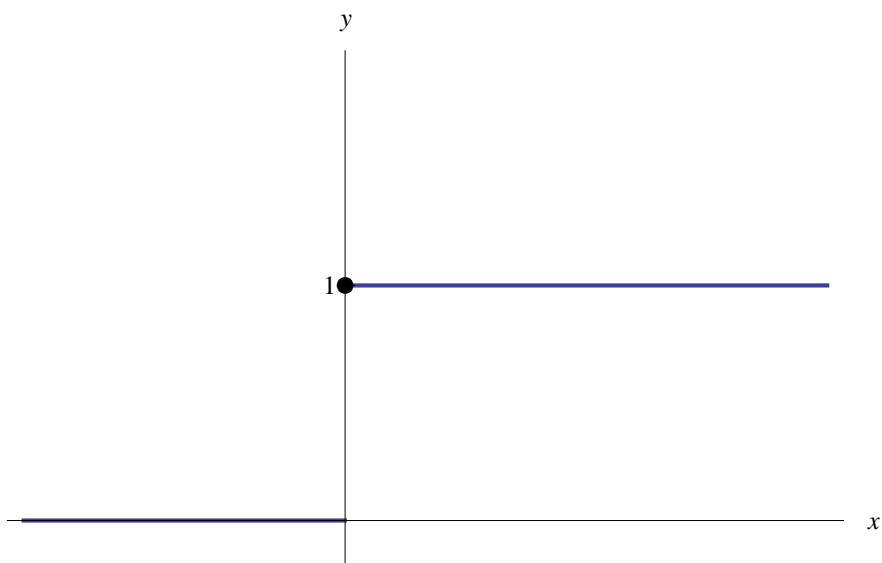


Figura 8.10: Grafico della funzione unit step $U(x)$. La funzione è definita in $x = 0$, dove assume il valore 1.

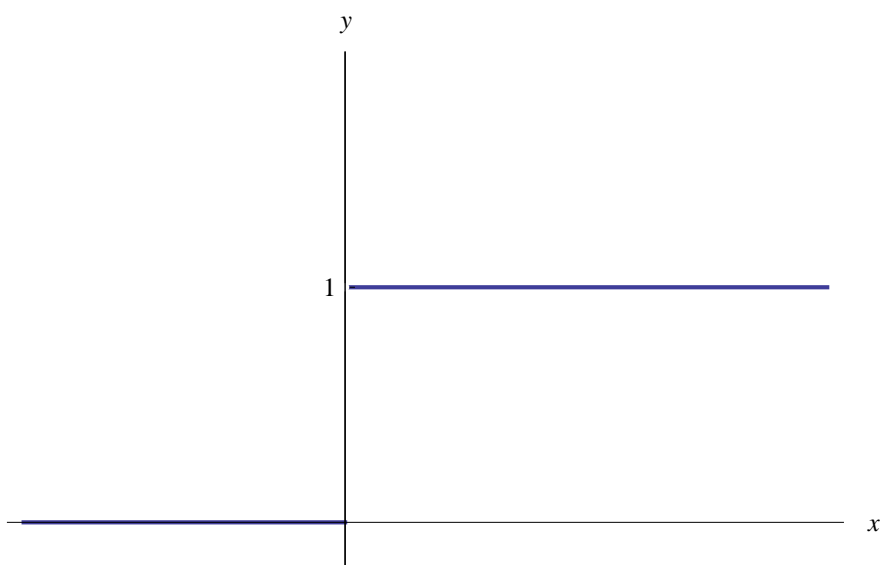


Figura 8.11: Grafico della funzione di Heaviside. La funzione non è definita in $x = 0$.

In altri termini, la delta di Dirac discreta assume solo due valori: 0 e 1 ed è pari a 1 se tutti i suoi argomenti sono nulli. Si noti che abbiamo utilizzato il simbolo asteriscato δ^* , altrimenti nel caso $p = 2$ rischiamo di confonderci con la delta di Kronecker:

$$\delta_{n_1 n_2} = \begin{cases} 1, & \text{se } n_1 = n_2 \\ 0, & \text{se } n_1 \neq n_2 \end{cases}$$

Nel caso di una sola variabile:

$$\delta^*(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (8.18)$$

Ciò premesso, *Mathematica* fornisce il seguente risultato:

$$\frac{d}{dx}U(x) = \frac{U(x) + U(-x) - 1 - \delta^*(x)}{1 - \delta^*(x)} \quad (8.19)$$

Ma

$$U(x) + U(-x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x = 0 \\ 1, & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Sostituendo nella (8.19):

$$\frac{d}{dx}U(x) = \begin{cases} \frac{2-1-\delta^*(0)}{1-\delta^*(0)} \underset{\delta^*(0)=1}{=} \frac{0}{0}, & \text{se } x = 0 \\ \frac{1-1-0}{1-0} = 0, & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \quad (8.20)$$

Tale risultato è confermato da *Mathematica*. Infatti, il comando `Simplify[]` restituisce un valore indeterminato nel punto $x = 0$.

8.3 Moto piano in un campo di Heaviside

Una particella compie un moto piano con le seguenti equazioni orarie:

$$x = v_{1x}t, \quad y = y_0 + v_{1y}|t - t_0|, \quad t \in [0, +\infty), \quad (8.21)$$

dove $v_{1x}, v_{1y}, x_0 > 0$ sono costanti assegnate: v_{1x} e v_{1y} hanno le dimensioni di una velocità, mentre x_0 di una lunghezza. t_0 è un istante dato, da non confondere con l'istante iniziale $t = 0$. Dalle (8.21) otteniamo per derivazione, le componenti cartesiane della velocità. Per eseguire la derivazione conviene esplicitare il valore assoluto:

$$y(t) = \begin{cases} y_0 + v_{1y}(t_0 - t), & \text{se } 0 \leq t < t_0 \\ y_0 + v_{1y}(t - t_0), & \text{se } t \geq t_0 \end{cases} \quad (8.22)$$

Quindi:

$$\dot{x} = v_{1x}, \quad \dot{y} = \begin{cases} -v_{1y}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \\ v_{1y}, & \text{se } t \geq t_0 \end{cases}, \quad (8.23)$$

da cui il vettore velocità

$$\mathbf{v} = \begin{cases} v_{1x}\mathbf{i} - v_{1y}\mathbf{j}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \\ v_{1x}\mathbf{i} + v_{1y}\mathbf{j}, & \text{se } t \geq t_0 \end{cases} \quad (8.24)$$

Dalla (8.24) vediamo che nell'intervallo di tempo $0 \leq t < t_0$ il moto è rettilineo ed uniforme con velocità:

$$\mathbf{v}_1 = v_{1x}\mathbf{i} - v_{1y}\mathbf{j},$$

mentre per $t \geq t_0$ il moto è ancora rettilineo ed uniforme, ma con velocità:

$$\mathbf{v}_2 = v_{1x}\mathbf{i} + v_{1y}\mathbf{j} \neq \mathbf{v}_1$$

Più precisamente, per ogni istante t la velocità conserva la componente nella direzione dell'asse x , mentre la componente nella direzione dell'asse y passa istantaneamente (a t_0) da $-v_{1y}$ a v_{1y} . Eliminiamo il tempo t tra le (8.21) in modo da ottenere la rappresentazione ordinaria della traiettoria γ :

$$y = f(x),$$

dove

$$f(x) = y_0 + \eta_0 |x - x_0|, \quad (8.25)$$

avendo introdotto il parametro adimensionale

$$\eta_0 = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} > 0$$

Esplicitando il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} y_0 + \eta_0(x_0 - x), & \text{se } 0 \leq x < x_0 \\ y_0 + \eta_0(x - x_0), & \text{se } x \geq x_0 \end{cases}, \quad (8.26)$$

onde $\gamma = r_1 \cup r_2$, dove r_1 è il segmento della retta

$$r : y = -\eta_0 x + (y_0 + \eta_0 x_0),$$

di estremi $(0, y_0 + \eta_0 x_0)$ e $(x_0, 0)$, ovvero il seguente insieme di punti del piano cartesiano:

$$r_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < x_0, y = -\eta_0 x + (y_0 + \eta_0 x_0)\} \quad (8.27)$$

Invece r_2 è la semiretta $y = y_0 + \eta_0(x - x_0)$ di origine $(x_0, 0)$:

$$r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0 \leq x < +\infty, y = y_0 + \eta_0(x - x_0)\} \quad (8.28)$$

Ne consegue che $P_0(x_0, y_0)$ è un punto angoloso per la traiettoria γ della particella, come riportato in fig. 8.12.

Dalla (8.22) vediamo che in t_0 la funzione $y(t)$ non è derivabile, ma lo è a sinistra e a destra:

$$\dot{y}_-(t_0) = -v_{1y} < 0, \quad \dot{y}_+(t_0) = v_{1y} > 0,$$

per cui (t_0, y_0) è un punto angoloso per $\Gamma_y : y = y(t)$, come mostrato in fig. 8.13.

L'accelerazione della particella è:

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{x}(t)\mathbf{i} + \dot{y}(t)\mathbf{j} \underset{\dot{x}=0}{=} \ddot{y}(t)\mathbf{j} = \mathbf{0}, \quad \forall t \in [0, +\infty) - \{t_0\}$$

Infatti, la funzione $\dot{y}(t)$ non è derivabile in t_0 , giacchè non è ivi definita. Possiamo scrivere la sua espressione analitica in termini di funzione di Heaviside:

$$\dot{y}(t) = v_{1y}[\theta(t - t_0) - \theta(t_0 - t)], \quad (8.29)$$

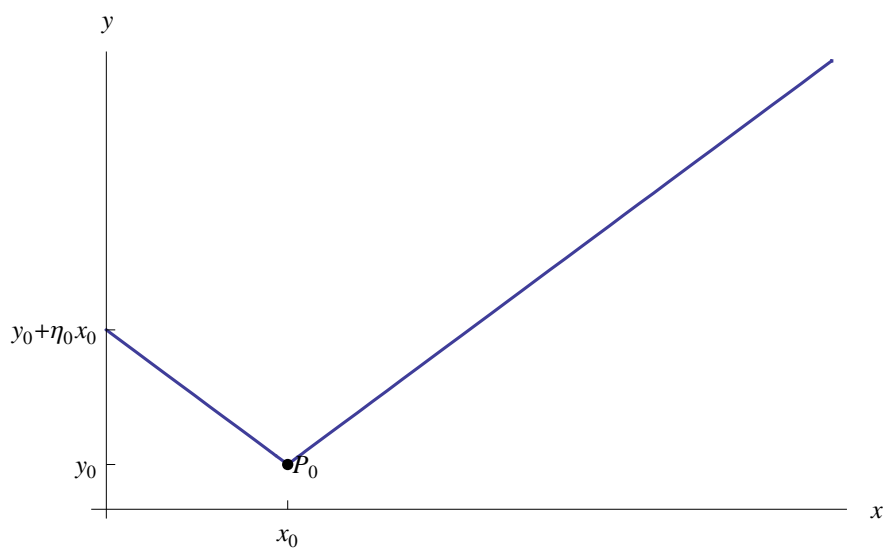


Figura 8.12: Traiettoria di una particella che compie un moto piano con equazioni orarie (8.21)

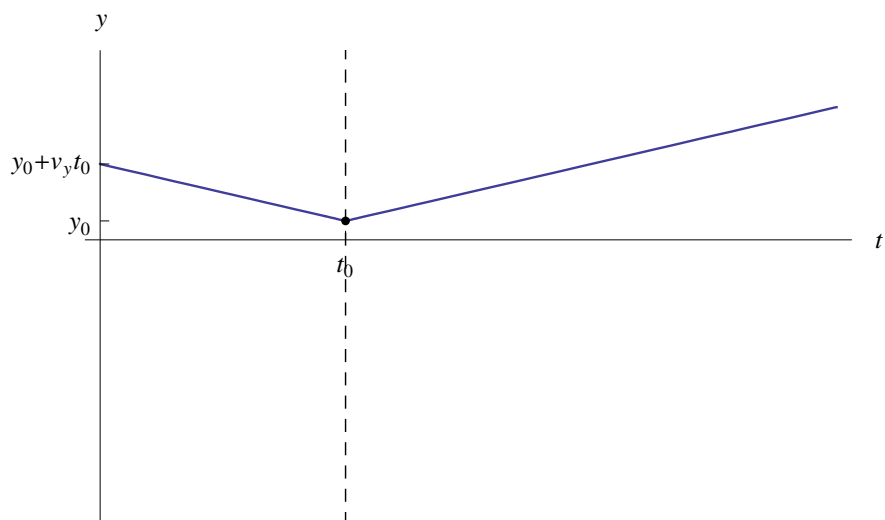
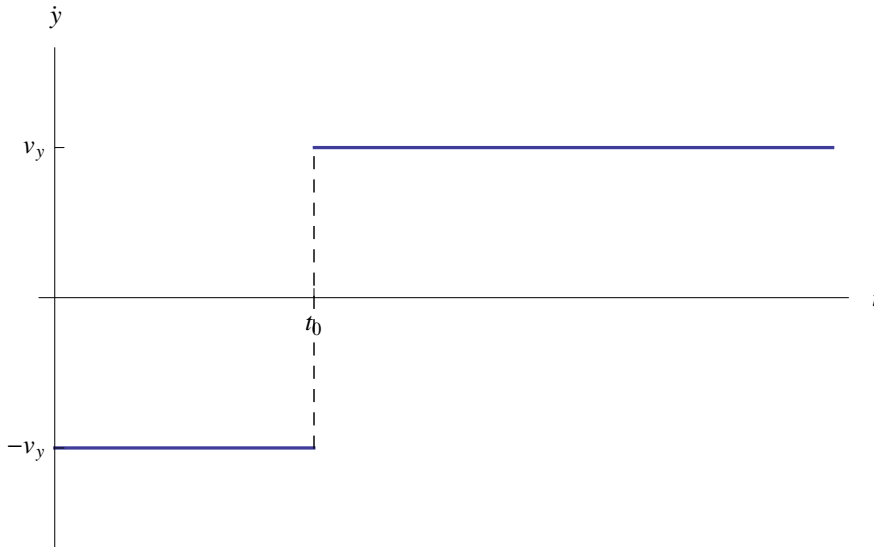


Figura 8.13: Grafico della funzione $y(t)$ (cfr. eq. 8.22)


 Figura 8.14: Grafico della funzione $\dot{y}(t)$ (cfr. eq. 8.29)

grafica in fig. 8.14. Ricordando che

$$\frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(x), \quad (8.30)$$

dove $\delta(x)$ è la funzione delta di Dirac, si ha:

$$\ddot{y}(t) = v_{1y} [\delta(t - t_0) - \delta(t_0 - t)] \quad (8.31)$$

Se m è la massa della particella, la forza agente è:

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t) = mv_{1y} [\delta(t - t_0) - \delta(t_0 - t)]\mathbf{j}$$

Ma $t - t_0 = \frac{x - x_0}{v_{1x}}$, onde:

$$\mathbf{F}(y) = mv_{1x}v_{1y} [\delta(y - y_0) - \delta(y_0 - y)]\mathbf{j} \quad (8.32)$$

Qui abbiamo utilizzato una nota proprietà della delta di Dirac:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$$

La (8.32) è un'espressione formale che tuttavia ci dice che la forza $\mathbf{F}(y)$ agente sulla particella è posizionale e come tale, derivante da un'energia potenziale tale che:

$$\mathbf{F}(y) = -\frac{dV(y)}{dy}\mathbf{j}$$

da cui:

$$\frac{dV(y)}{dy} = -mv_{1x}v_{1y} [\delta(y - y_0) - \delta(y_0 - y)]$$

In forza della (8.30):

$$V(y) = V_0 [\theta(y_0 - y) - \theta(y - y_0)], \quad (8.33)$$

dove $V_0 > 0$ è una costante con le dimensioni di un'energia. Ne concludiamo che la particella si muove in una regione in cui è definito un campo di forze di energia potenziale (8.33). Il campo scalare (8.33) è denominato *campo di Heaviside*, il cui grafico è riportato in fig. 8.15.

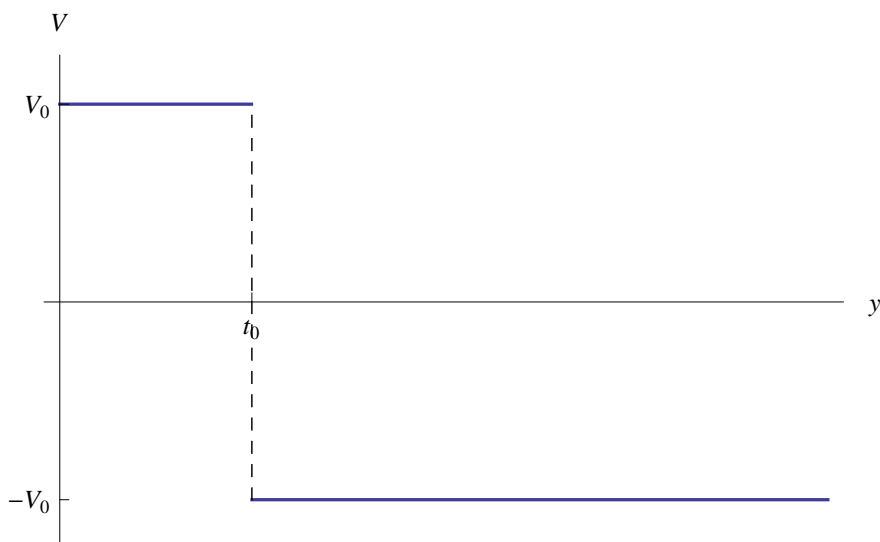


Figura 8.15: Grafico del potenziale di Heaviside.

8.4 Un problema di Cauchy

Le argomentazioni del capitolo 8.1 suggeriscono lo studio del seguente problema di Cauchy:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} y'' = \delta(x) \\ y(\xi_0) = \eta_0, y'(\xi_0) = \eta'_0 \end{cases}, \quad (8.34)$$

con $\eta_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\eta'_0 \in \mathbb{R}$, costanti assegnate. Abbiamo dunque un'equazione differenziale del secondo ordine di forma normale. Più precisamente, si tratta di un'equazione a coefficienti costanti non omogenea. La particolare natura del termine noto, ovvero la funzione impropria $\delta(x)$, rende difficoltosa l'applicazione del teorema di esistenza ed unicità. Per bypassare la questione, consideriamo quest'altro problema di Cauchy:

$$\mathcal{P}_a : \begin{cases} y'' = f'_a(x) \\ y(\xi_0) = \eta_0, y'(\xi_0) = \eta'_0 \end{cases}, \quad (8.35)$$

dove $f'_a(x)$ è la derivata della funzione (8.7), che qui riscriviamo:

$$f'_a(x) = \frac{1}{e^{-\frac{x}{a}} + 1}$$

Dall'evidente regolarità di $f'_a(x)$, segue l'esistenza e l'unicità della soluzione di \mathcal{P}_a . La $y'' = f'_a(x)$ si integra facilmente, ottenendo l'integrale generale:

$$y_a(x, c_1, c_2) = a \ln(1 + e^{\frac{x}{a}}) + c_1 x + c_2, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (8.36)$$

Imponendo le condizioni iniziali $y(\xi_0) = \eta_0$, $y'(\xi_0) = \eta'_0$ si ottiene la soluzione:

$$\begin{aligned} \eta_a(x) &= a \ln(1 + e^{\frac{x}{a}}) + x \left(\eta'_0 - \frac{1}{e^{-\frac{\xi_0}{a}} + 1} \right) + \\ &+ \eta_0 - a \ln(1 + e^{\frac{\xi_0}{a}}) - \xi_0 \eta'_0 + \frac{\xi_0}{e^{-\frac{\xi_0}{a}} + 1} \end{aligned} \quad (8.37)$$

8.5 Transitori circuitali: serie RC

Consideriamo il seguente circuito elettrico riportato in fig. 8.16 in cui una resistenza R è collegata in serie a un condensatore di capacità C .

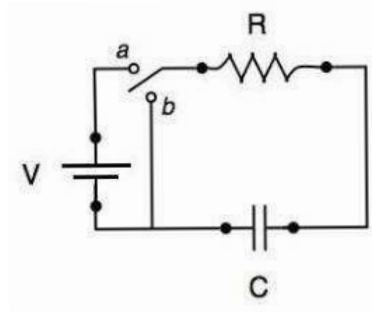


Figura 8.16: Serie RC .

La serie è alimentata da una batteria che fornisce una differenza di potenziale $V = \text{costante}$. All'istante $t = 0$ il circuito viene chiuso tramite un interruttore, per cui la carica elettrica iniziale posseduta dal condensatore è $q_0 = q(t = 0) = 0$. A tutti i tempi $t > 0$ è [3]:

$$q(t) = q_M \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_c}} \right), \quad (8.38)$$

dove $\tau_c = RC$ è una grandezza con le dimensioni di un tempo e si chiama *costante di tempo* della serie RC , mentre $q_M = CV$. Dalla (8.38):

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) &= q_M \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_c}} \right) \\ &= q_M (1 - e^{-\infty}) \end{aligned} \quad (8.39)$$

$$= q_M (1 - 0^+) \quad (8.40)$$

$$= q_M^- \quad (8.41)$$

cioè q_M è il valore asintotico della carica elettrica sulle armature del condensatore. In fig. 8.17 riportiamo il grafico della funzione (8.38).

Dalla (8.38) ricaviamo l'intensità di corrente che circola nella serie:

$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t) = i_M e^{-\frac{t}{\tau_c}}, \quad (8.42)$$

dove $i_M = \frac{q_M}{\tau_c}$. Riesce:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} i(t) = 0^+ \quad (8.43)$$

In fig. 8.18 riportiamo il grafico della funzione 8.42.

Cioè, mentre la carica elettrica sulle armature del condensatore segue una salita esponenziale (cfr. eq. (8.38)), l'intensità di corrente nel circuito diminuisce esponenzialmente. Ciò non deve sorprendere, poichè a tempi brevi la carica elettrica varia rapidamente, per cui abbiamo "alti" valori di intensità di corrente. Viceversa, a tempi lunghi la carica tende a "stabilizzarsi" sul valore costante q_M , onde la corrente assume valori progressivamente trascurabili. Quantitativamente:

$$\begin{aligned} 0 \leq t \ll \tau_c &\implies i(t) \simeq i_M \\ t \gg \tau_c &\implies q \simeq q_M, \quad i(t) \simeq 0 \end{aligned}$$

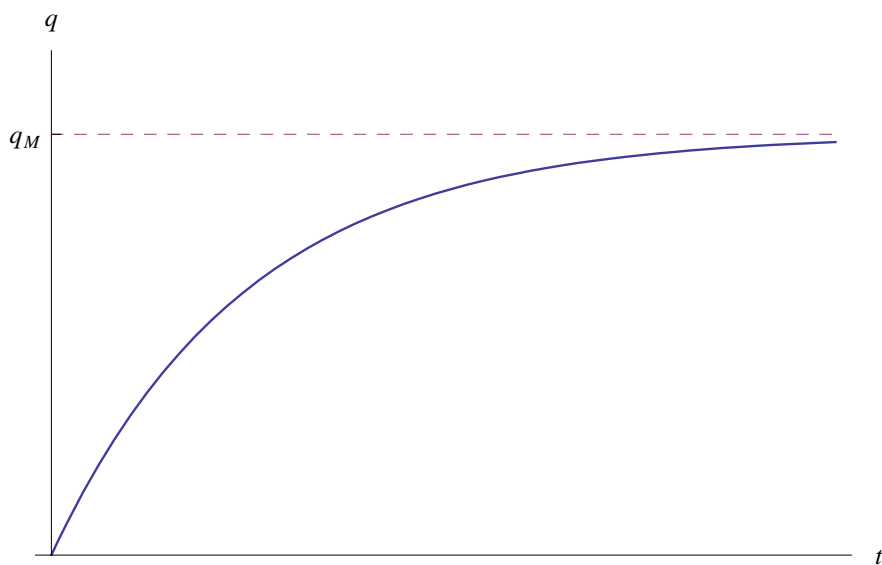


Figura 8.17: Andamento della carica elettrica $q(t)$ sulle armature del condensatore.

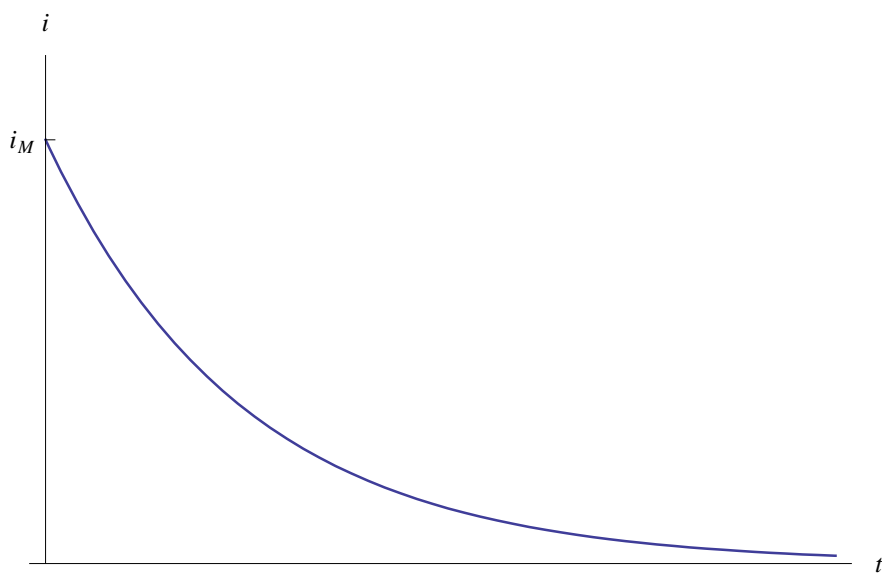


Figura 8.18: Andamento dell'intensità di corrente in funzione del tempo.

Da tale analisi segue che la costante di tempo τ_c fissa la scala dei tempi del transitorio di carica. Supponendo di poter variare la capacità C (si pensi ad un condensatore variabile), si ha:

$$C' > C \implies \tau'_c = RC' > RC,$$

ovvero la serie RC' impiega più tempo a “caricarsi²” rispetto alla serie RC . Viceversa:

$$C'' < C \implies \tau''_c = RC'' < RC,$$

ovvero la serie RC'' impiega meno tempo a “caricarsi” rispetto alla serie RC . Tali conclusioni sono illustrate in fig. 8.19.

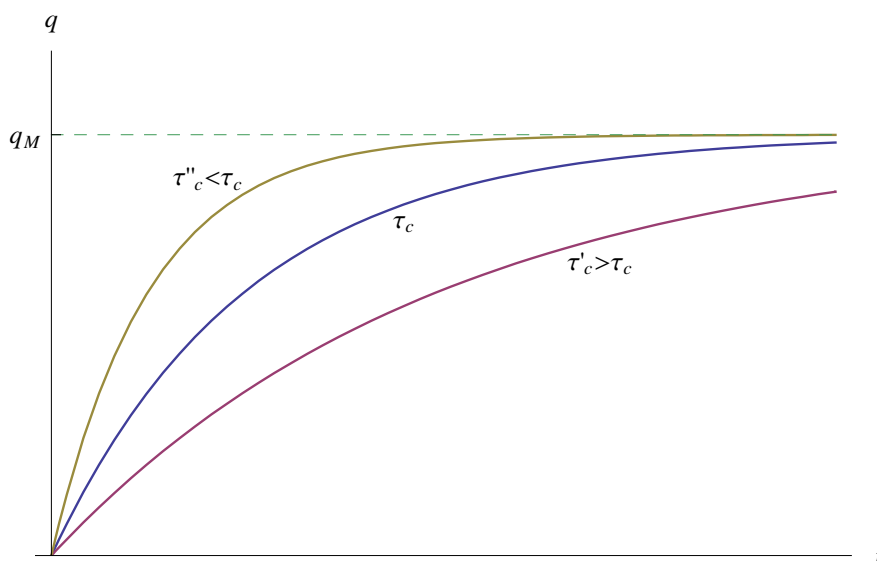


Figura 8.19: Andamento della carica elettrica $q(t)$ per differenti valori della costante di tempo. Se $\tau'_c > \tau_c$ il processo di carica è più lento. Viceversa, è più rapido per $\tau''_c < \tau_c$.

La dipendenza parametrica da τ_c esibita dalla funzione (8.38) suggerisce di riscrivere quest’ultima come:

$$q(t) = q_M f_{\tau_c}(t), \tag{8.44}$$

essendo:

$$f_{\tau_c}(t) \stackrel{def}{=} 1 - e^{-\frac{t}{\tau_c}},$$

una salita esponenziale (adimensionale) di costante di tempo τ_c . Abbiamo quindi la famiglia di salite esponenziali:

$$\{f_{\tau_c}(t)\}_{\tau_c \in \mathbb{R}_0},$$

dove – ricordiamolo – è $\mathbb{R}_0 = (0, +\infty)$. Per quanto precede, la costante di tempo controlla la rapidità del processo di carica. Le condizioni agli estremi del campo di variabilità di τ_c sono:

$$\begin{aligned} \tau_c \rightarrow +\infty &\implies f_{\infty}(t) \rightarrow 0 \implies \text{la serie va a regime dopo un tempo } \infty \\ \tau_c \rightarrow 0^+ &\implies \text{la serie va a regime istantaneamente} \end{aligned}$$

Dal punto di vista dell’Analisi matematica è più interessante il caso 2. Possiamo immaginare di mantenere costante la capacità C , e di far variare la resistenza, per cui $\tau_c \rightarrow 0^+$ per

²In elettrotecnica si dice che *va a regime*.

$R \rightarrow 0^+$. In altre parole, abbiamo un condensatore ideale, giacchè R può essere interpretata come una resistenza interna. Come possiamo esprimere la funzione $q(t)$ per $R \rightarrow 0^+$? Per quanto precede, riesce:

$$q(t) = q_M U(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (8.45)$$

dove $U(t)$ è la funzione unit step:

$$U(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0 \\ 0, & \text{se } t \leq 0 \end{cases} \quad (8.46)$$

Possiamo provare a calcolare l'intensità di corrente

$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t)$$

È ovvio che per $t > 0$ è $i(t) = 0$, mentre nell'istante iniziale $t = 0$, applicando la definizione di derivata:

$$i(0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta q}{\Delta t} \right)_{t=0} \quad (8.47)$$

Anzichè applicare la (8.47) facciamo le seguenti considerazioni.

La funzione (8.45) ha una discontinuità di prima specie in $t = 0$:

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} q(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} q(t) = q_M,$$

con salto $s(0) = q_M$. In altre parole, la carica elettrica immagazzinata dal condensatore, passa "istantaneamente" da 0 a q_M , per cui ci aspettiamo una corrente $i(0) = +\infty$. D'altra parte, confrontando la (8.45) con la (8.44) per $\tau_c \rightarrow 0^+$:

$$q_M U(t) = \lim_{\tau_c \rightarrow 0^+} q_M f_{\tau_c}(t), \quad \forall t \geq 0$$

Cioè:

$$U(t) = \lim_{\tau_c \rightarrow 0^+} f_{\tau_c}(t), \quad \forall t \geq 0 \quad (8.48)$$

In altri termini, per $t \geq 0$ la funzione unit step è una salita esponenziale con costante di tempo nulla. Tale conclusione è corroborata dalla seguente operazione di passaggio al limite:

$$t \geq 0 \implies \lim_{\tau_c \rightarrow 0^+} f_{\tau_c}(t) = \lim_{\tau_c \rightarrow 0^+} 1 - e^{-\frac{t}{\tau_c}} = 1 - 0^+ = 1^-$$

In fig. 8.20 riportiamo il grafico della derivata

$$\frac{d}{dt} f_{\tau_c}(t), \quad (8.49)$$

per valori decrescenti di τ_c .

La funzione (8.49) ha un massimo assoluto in $t = 0$:

$$\left. \frac{d}{dt} f_{\tau_c}(t) \right|_{t=0} = \frac{1}{\tau_c} \xrightarrow{\tau_c \rightarrow 0^+} +\infty,$$

per cui:

$$i(0) \xrightarrow{\tau_c \rightarrow 0^+} +\infty$$

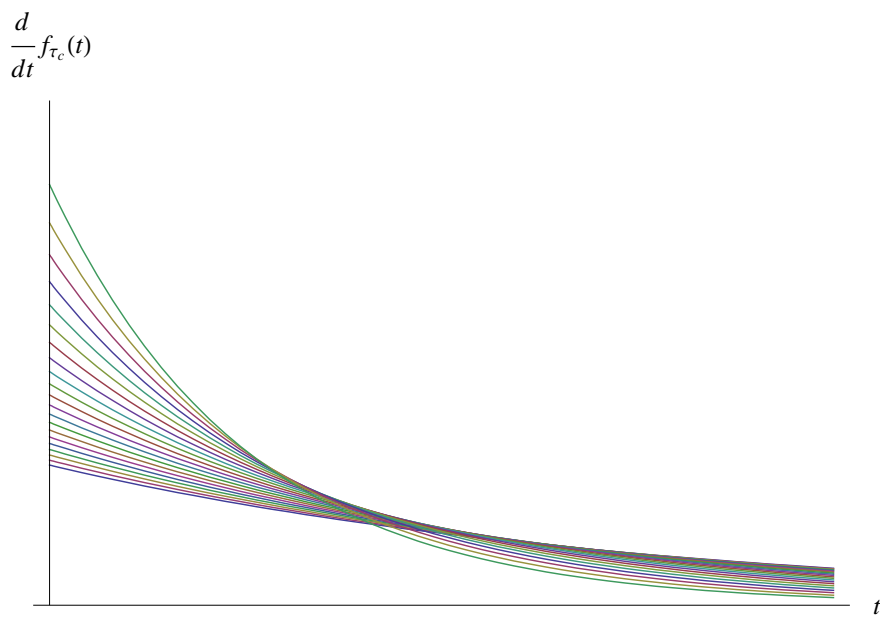


Figura 8.20: Grafico della derivata di $f_{\tau}(t)$ per valori decrescenti di τ_c .

Capitolo 9

Funzioni continue prive di derivata prima

9.1 Il pettine di Dirac

Abbiamo visto che la continuità di una funzione reale di una variabile reale è una condizione necessaria ma non sufficiente per la derivabilità in un punto assegnato. Ad esempio, la funzione $f(x) = |x|$ è continua in \mathbb{R} ma non è derivabile in $x = 0$. Ne consegue che denotando con $A(f)$ l'insieme di derivabilità di f , si ha $A(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Se poi consideriamo la funzione $g(x) = |\sin x|$, si ha

$$A(g) = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\}$$

Ci aspettiamo, dunque, che per una qualunque funzione continua, l'insieme di *non* derivabilità sia al più infinito numerabile. Premettiamo la seguente definizione:

Definizione 8 Sia f una funzione continua in un intervallo $X \subseteq \mathbb{R}$. Dicesi **insieme di non derivabilità** di f , il complementare in X dell'insieme di derivabilità $A(f)$. Cioè:

$$B(f) = X - A(f) \tag{9.1}$$

Ci poniamo la seguente questione:

$$\exists f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua in } X \mid B(f) = X \quad ?$$

Cioè: esistono funzioni continue in un intervallo X ma non derivabile in alcun punto di X ? Tentando di rispondere a tale domanda, poniamo $X = [a, b]$ con gli estremi a, b non necessariamente finiti. Eseguiamo una decomposizione $\mathcal{D}([a, b])$, assegnando $N + 1$ punti $x_0, x_1, \dots, x_N \in [a, b]$ tali che:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$$

$\mathcal{D}([a, b])$ decompone $[a, b]$ in N intervalli $[x_k, x_{k+1}] \subset [a, b]$ con $k = 0, 1, \dots, N - 1$:

$$[a, b] = \bigcup_{k=0}^{N-1} [x_k, x_{k+1}],$$

a due a due disgiunti:

$$[x_k, x_{k+1}] \cap [x_{k'}, x_{k'+1}] = \emptyset, \quad \forall k \neq k'$$

La *norma* o *ampiezza* di $\mathcal{D}([a, b])$ è $\Delta = \max(x_{k+1} - x_k)$. Per quanto precede, il numero di punti della decomposizione è $N + 1$, ed è chiaro che non possiamo definire una densità di punti, poichè questi compongono un insieme al più infinito numerabile:

$$\{x_0, x_1, \dots, x_N\} \quad (9.2)$$

Tuttavia, la densità di punti può essere espressa nel senso della teoria delle distribuzioni, cioè ricorrendo alla funzione delta di Dirac. Più precisamente, “etichettiamo” ogni punto con una funzione delta:

$$\delta(x - x_k) \quad k\text{-esimo punto}$$

Introduciamo il *pettine di Dirac* di ordine N :

$$\rho_N(x) = \sum_{k=0}^N \delta(x - x_k) \quad (9.3)$$

$\rho_N(x)$ ha le dimensioni di $\delta(x - x_k)$ cioè dell'inverso di una lunghezza, ovvero di una densità di punti, i.e. numero di punti per unità di lunghezza. Per verificare tale congettura, integriamo primo e secondo membro di (9.3) su tutto \mathbb{R} :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_N(x) dx = \sum_{k=0}^N \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_k) dx}_{=1} = N + 1,$$

cioè il numero di punti di $\mathcal{D}([a, b])$. Senza perdita di generalità, consideriamo una decomposizione di norma costante:

$$\Delta = \frac{b - a}{N},$$

onde

$$x_k = a + k \frac{b - a}{N}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N)$$

In tal caso, la (9.3) si scrive:

$$\rho_N(x) = \sum_{k=0}^N \delta\left(x - a + k \frac{b - a}{N}\right) \quad (9.4)$$

Ogni punto di $[a, b]$ è di accumulazione per $[a, b]$, onde comunque prendiamo $x_0 \in [a, b]$ in ogni intorno di x_0 cadono infiniti punti $x \in [a, b] - \{x_0\}$. Ciò $\rho_{N \rightarrow +\infty}(x)$ diverge in ogni punto $x \in [a, b]$. Ciò non deve sorprendere poichè $\rho_N(x)$ è una funzione impropria:

$$\rho_N(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq x_k, \quad (k = 0, 1, \dots, N) \\ +\infty, & \text{se } x = x_k, \quad (k = 0, 1, \dots, N) \end{cases}$$

Se denotiamo con S_N l'insieme (9.2), si ha

$$S_{N \rightarrow +\infty} = [a, b]$$

Eseguiamo una decomposizione di norma costante dell'intervallo $[0, b]$, cioè $\Delta = \frac{b}{N}$, per cui $x_k = k \frac{b}{N}$ ($k = 0, \dots, N$). Ad esempio, per $N = 2$ abbiamo

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{b}{2}, \quad x_2 = b$$

$$[0, b] = \left[0, \frac{b}{2}\right] \cup \left[\frac{b}{2}, b\right]$$

Quindi, consideriamo la funzione:

$$f_1(x) = \begin{cases} x, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{b}{2} \\ b - x, & \text{se } \frac{b}{2} < x \leq b \end{cases}, \quad (9.5)$$

continua in $[0, b]$, il cui grafico è riportato in fig. 9.1.

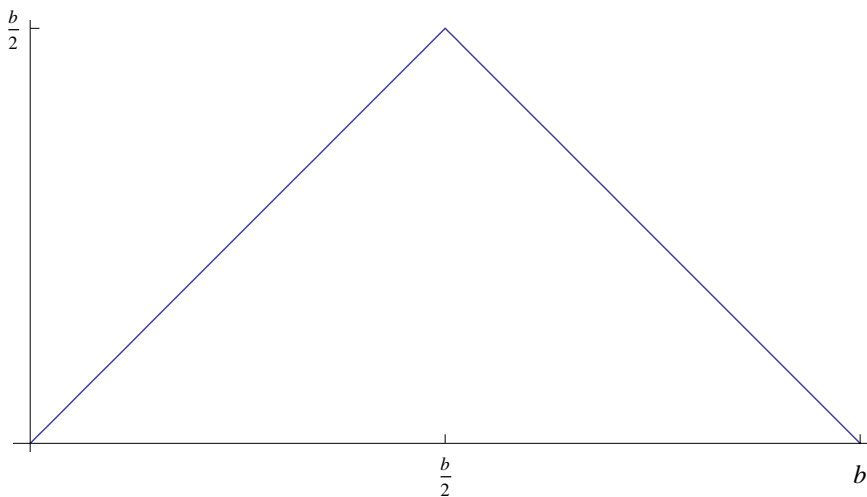


Figura 9.1: Grafico della funzione (9.5)

La (9.4) si scrive:

$$\rho_2(x) = \sum_{k=0}^2 \delta \left(x - k \frac{b}{2} \right)$$

Tuttavia, l'unico punto di discontinuità di $f'(x)$ è $x_1 = \frac{b}{2}$. Infatti:

$$f'_1(x) = \theta(x) - 2\theta \left(x - \frac{b}{2} \right), \quad (9.6)$$

il cui grafico è riportato in fig. 9.2.

Per $N = 3$:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{b}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3}b, \quad x_3 = b$$

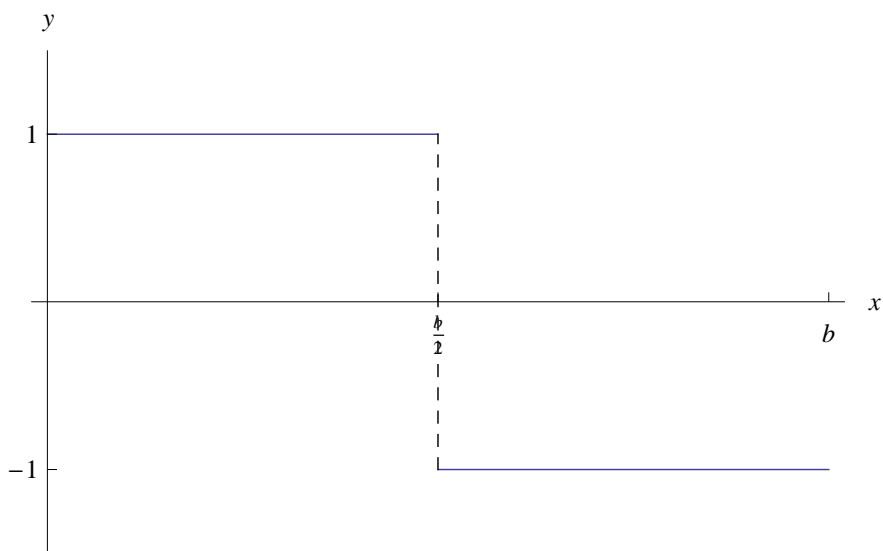


Figura 9.2: Grafico della derivata prima della funzione (9.5)

Bibliografia

- [1] Wagon S.: *Guida a Mathematica*, McGrawHill, 1995
- [2] Fiorenza R.: *Lezioni di Analisi matematica*, Liguori, 1978
- [3] Edminser J.A.: *Circuiti elettrici*, Schaum, 1991