Derivazione di una funzione vettoriale

Marcello Colozzo

1 Premessa

Nei numeri precedenti abbiamo esteso la nozione di **convergenza** di una funzione reale di variabile reale ad una funzione vettoriale. Precisamente:

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{L} \in \mathbb{R}^3$$

Se l'insieme base è illimitato superiormente [inferiormente], possiamo estendere la predetta proprietà per $t \to +\infty$ $[t \to -\infty]$, ovvero:

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbf{f}(t) = \mathbf{L} \quad \left[\lim_{t \to -\infty} \mathbf{f}(t) = \mathbf{L}\right]$$

Anche la definizione di funzione **divergente** si generalizza facilmente. Diremo che una funzione vettoriale è divergente ini modulo, se almeno una delle sue funzioni componenti è tale (cioè ciò che diverge è il valore assoluto):

$$\lim_{t \to t_0} |\mathbf{f}(t)| = +\infty,$$

ove t_0 è punto di accumulazione (al finito o all'infinito) per l'insieme di definizione della funzione vettoriale.

2 Il rapporto incrementale

Premesso ciò, vogliamo estendere la nozione di derivata alle funzioni vettoriali.

Definizione 1 *Assegnata la funzione vettoriale*

$$\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \tag{1}$$

ed un punto t_0 *dell"insieme di definizione di* $\mathbf{f}(t)$, *dicesi* **rapporto incrementale** *di* $\mathbf{f}(t)$ *relativo al punto* t_0 *e all'incremento* Δt *della variabile indipendente, il vettore*

$$\frac{\mathbf{f}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{f}(t_0)}{\Delta t} \tag{2}$$

Notiamo che abbiamo introdotto una nuova funzione vettoriale, ma della variabile scalare Δt. Tale funzione è definita in

$$E_{t_0} = \{\Delta t \in \mathbb{R} - \{0\} \mid (t_0 + \Delta t) \in X\} \tag{3}$$

Dal momento che $\Delta t = 0$ è punto di accumulazione per E_{t_0}, possiamo studiare il comportamento della nuova funzione in un intorno del predetto punto. Abbiamo quindi:

Definizione 2 *La funzione vettoriale $f(t)$ è* **derivabile** *in t_0, se il rapporto incrementale (2) è convergente per $\Delta t \to 0$, cioè se*

$$\exists \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{f}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{f}(t_0)}{\Delta t} \in \mathbb{R}^3$$

ed il corrispondente limite è la **derivata** *di $\mathbf{f}(t)$ in t_0:*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{f}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{f}(t_0)}{\Delta t} = \mathbf{f}'(t_0)$$

Per come abbiamo esteso la nozione di limite ad una funzione vettoriale, si ha:

$$\mathbf{f}'(t_0) = (f_1'(t_0), f_2'(t_0), f_3'(t_0))$$

Segue poi l'ovvia definizione:

Definizione 3 *Una funzione vettoriale è derivabile in X, se è derivabile in ogni punto di X.*

Evidentemente:

$$\mathbf{f}'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t)), \quad \forall t \in X$$

Abbiamo quindi, una nuova funzione vettoriale della variabile t, ovvero la **derivata prima**, ed è chiaro che il processo di derivazione può essere iterato (ove possibile), generando la derivata *k-esima*

$$\mathbf{f}^{(k)}(t) = \left(f_1^{(k)}(t), f_2^{(k)}(t), f_3^{(k)}(t)\right), \quad \forall t \in X$$

Esercizio 4 *Studiare la derivabilità della funzione vettoriale*

$$\mathbf{x}(t) = R(\cos t)\mathbf{e}_1 + R(\sin t)\mathbf{e}_2, \quad (R > 0), \quad t \in [0, 2\pi] \tag{4}$$

Dare un'interpretazione geometrica al risultato, supponendo che la predetta funzione vettoriale sia la rappresentazione parametrica di una curva piana.

Soluzione

La derivata si calcola facilmente:

$$\mathbf{x}'(t) = -R(\sin t)\mathbf{e}_1 + R(\cos t)\mathbf{e}_2$$

Per interpretare geometricamente tale vettore, scriviamo la rappresentazione cartesiana della curva data. Precisamente, eliminando il parametro t ovvero quadrando e sommando le componenti cartesiane della funzione, otteniamo

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

cioè l'equazione di una circonferenza di centro l'origine e raggio R. Vediamo poi:

$$\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}'(t) = 0, \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

Cioè i due vettori sono identicamente ortogonali (i.e. ortogonali per ogni t). Se applichiamo il vettore derivata prima nel punto posizionato da $\mathbf{x}(t)$, vediamo che è tangente alla circonferenza, come mostrato in fig. 1

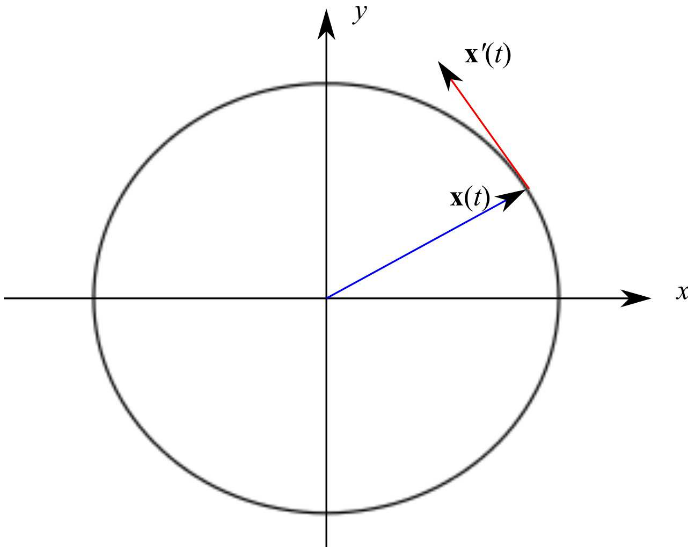

Figura 1: Esercizio 4.

Superficie regolare e sua rappresentazione parametrica

Ricordiamo rapidamente dal corso di Analisi Matematica 2 la definizione di *superficie regolare*, dando per scontata la nozione di rappresentazione parametrica di un assegnato luogo geometrico. Nel caso specifico di una superficie scriviamo:

$$x = x(u,v), \ y = y(u,v), \ z = z(u,v) \tag{5}$$

essendo

Definizione 5 *1.* $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v) \in C^1(D)$

2. $\rho(J) = 2$, *dove* J *è la matrice jacobiana dell*