Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_{\Gamma} (X\,dx + Y\,dy + Zdz)$$

Esercizi sulle equazioni goniometriche

Esercizio 1. Risolvere:

$$\sin^2 x - \sin x = 0 \tag{1}$$

Svolgimento.

$$\sin^2 x - \sin x = 0 \Longleftrightarrow \sin x (\sin x - 1) = 0 \Longleftrightarrow \sin x = 0, \ \sin x = 1,$$

le cui soluzioni sono:

$$x = k\pi, \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Esercizio 2. Risolvere:

$$\sin^2 x - 2\sin x = 0 \tag{2}$$

Svolgimento.

$$\sin^2 x - 2\sin x = 0 \Longleftrightarrow \sin x (\sin x - 2) = 0 \Longleftrightarrow \sin x = 0,$$

giacchè $\sin x - 2 \neq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Quindi le soluzioni sono $x = k\pi$.

Esercizio 3. Risolvere:

$$2\sin^2 x - \sin x = 0 \tag{3}$$

Svolgimento.

$$2\sin^2 x - \sin x = 0 \Longleftrightarrow \sin x (2\sin x - 1) = 0 \Longleftrightarrow \sin x = 0, \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

La prima è risolta da $x = k\pi$. La seconda da $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \ x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$. Ne concludiamo che le soluzioni dell'equazione assegnata sono:

$$x = k\pi, \ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \ x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 4. Risolvere:

$$2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0 \tag{4}$$

Svolgimento.

$$2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0 \Longleftrightarrow \cos x \left(2\cos x - \sqrt{3}\right) = 0 \Longleftrightarrow \cos x = 0, \ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

La prima è risolta da $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, mentre la seconda da $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \ x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$. Queste ultime possono essere inglobate nell'unica formula $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$. Ne concludiamo che le soluzioni dell'equazione assegnata sono:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \ x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$$

Esercizio 5. Risolvere:

$$2\cos^2 x + \cos x = 0 \tag{5}$$

Svolgimento.

$$2\cos^2 x + \cos x = 0 \iff \cos x\,(2\cos x + 1) = 0 \iff \cos x = 0, \;\; \cos x = -\frac{1}{2}$$

La prima è risolta da $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Per risolvere la seconda tracciamo la circonferenza goniometrica (fig. 1), da cui vediamo che nell'intervallo $[0, 2\pi]$ risulta $\cos x = -\frac{1}{2}$ per $x = \frac{2}{3}\pi$ e $x = \frac{4}{3}\pi$. Trattandosi di una funzione periodica di periodo 2π:

$$x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \;\; x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$$

Osserviamo, tuttavia, che l'arco $\frac{4}{3}\pi$ può essere scritto come $-\frac{2}{3}\pi$, onde le formule precedenti sono inglobate nell'unica formula:

$$x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

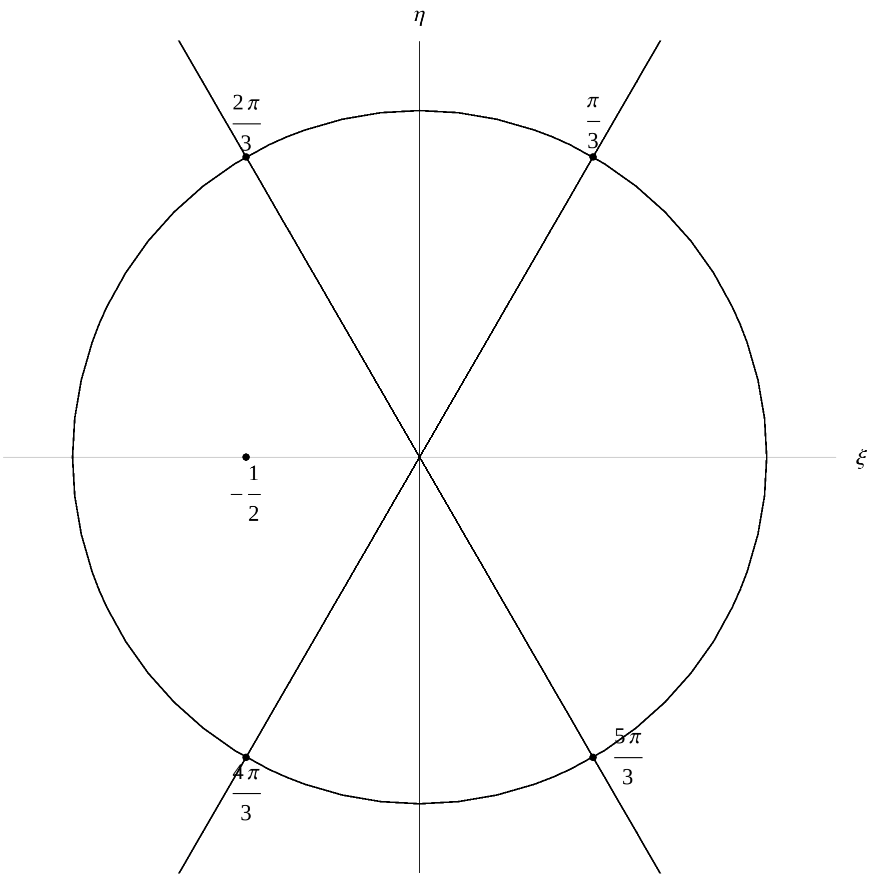

Figura 1: Nell'intervallo $[0, 2\pi]$ è $\cos x = -\frac{1}{2}$ per $x = \frac{2}{3}\pi$ e $x = \frac{4}{3}\pi$.

Ne concludiamo che le soluzioni della (5) sono:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \; x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

Esercizio 6. Risolvere:

$$\tan^2 x - \tan x = 0 \tag{6}$$

Svolgimento. Mettendo in evidenza $\tan x$:

$$\tan x\,(\tan x - 1) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \tan x = 0 \\ \tan x = 1 \end{cases}$$

La prima è risolta da $x = k\pi$, mentre la seconda da $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Ne concludiamo che le soluzioni dell'equazione assegnata sono tutti e soli i numeri reali:

$$x = k\pi, \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 7. Risolvere:

$$\cot^2 x + \cot x = 0 \tag{7}$$

Svolgimento. Mettendo in evidenza $\cot x$:

$$\cot x\,(\cot x + 1) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \cot x = 0 \\ \cot x = -1 \end{cases}$$

La prima è risolta da $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, mentre la seconda da $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. Ne concludiamo che le soluzioni dell'equazione assegnata sono tutti e soli i numeri reali:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 8. Risolvere:

$$\sqrt{3}\tan^2 x + \tan x = 0 \tag{8}$$

Svolgimento. Mettendo in evidenza $\tan x$

$$\tan x\left(\sqrt{3}\tan x + 1\right) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \tan x = 0 \\ \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

La prima è risolta da $x = k\pi$, mentre la seconda da $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$. Ne concludiamo che le soluzioni dell'equazione assegnata sono tutti e soli i numeri reali:

$$x = k\pi, \quad x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 9. Risolvere:

$$\sin^2 x - 1 = 0 \tag{9}$$

Svolgimento.

$$\sin x = \pm 1 \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Esercizio 10. Risolvere:

$$\cos^2 x - 1 = 0 \tag{10}$$

Svolgimento.

$$\cos x = \pm 1 \Longleftrightarrow x = k\pi$$

Esercizio 11. Risolvere:

$$4\cos^2 x - 3 = 0 \tag{11}$$

Svolgimento. Risolvendo rispetto a $\cos x$:

$$\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sappiamo che $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, per cui le soluzioni sono:

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \; x = \frac{5}{6}\pi + k\pi$$

Esercizio 12. Risolvere:

$$4\sin^2 x - 1 = 0 \tag{12}$$

Svolgimento. Risolvendo rispetto a $\sin x$:

$$\sin x = \pm\frac{1}{2}$$

Sappiamo che $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, per cui le soluzioni in $[0, 2\pi]$ sono:

$$x = \frac{\pi}{6},\ \ x = \frac{5}{6}\pi,\ \ \ x = \frac{7}{6}\pi,\ x = \frac{11}{6}\pi,$$

come possiamo vedere dalla circonferenza goniometrica tracciata in fig.2.

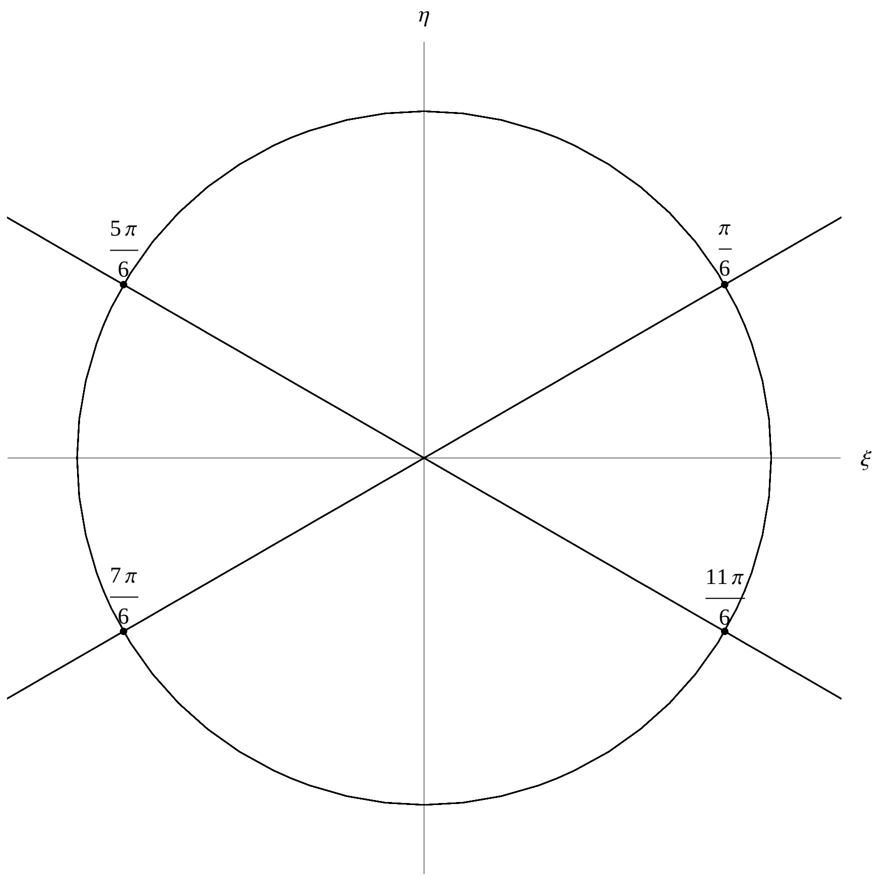

Figura 2: Nell'intervallo $[0, 2\pi]$ è $\sin x = \pm\frac{1}{2}$ per $x = \frac{\pi}{6}$, $\ x = \frac{5}{6}\pi$, $\ \ x = \frac{7}{6}\pi$, $\ x = \frac{11}{6}\pi$.

Le soluzioni in $\mathbb{R}$ sono:

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ x = \frac{5}{6}\pi + k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

Alternativamente, possiamo determinare le soluzioni in $[-\pi, \pi]$, anzichè in $[0, 2\pi]$. A tale scopo, tracciamo nuovamente la circonferenza goniometrica in .3, ottenendo:

$$x = \pm\frac{\pi}{6},\ \ x = \pm\frac{5}{6}\pi \tag{13}$$

Da ciò segue che le soluzioni in $\mathbb{R}$ sono:

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ x = \pm\frac{5}{6}\pi + k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

La seconda è contenuta nella prima; infatti:

$$\frac{5}{6}\pi + k\pi = -\frac{\pi}{6} + \pi + k\pi = -\frac{\pi}{6} + (k+1)\pi$$
$$-\frac{5}{6}\pi + k\pi = \frac{\pi}{6} - \pi + k\pi = \frac{\pi}{6} + (k-1)\pi$$

Cioè:

$$\begin{cases} \frac{5}{6}\pi + k\pi = -\frac{\pi}{6} + k'\pi \\ -\frac{5}{6}\pi + k\pi = \frac{\pi}{6} + k''\pi \end{cases}, \quad k' = k+1, \ k'' = k-1, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Di conseguenza le soluzioni sono:

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

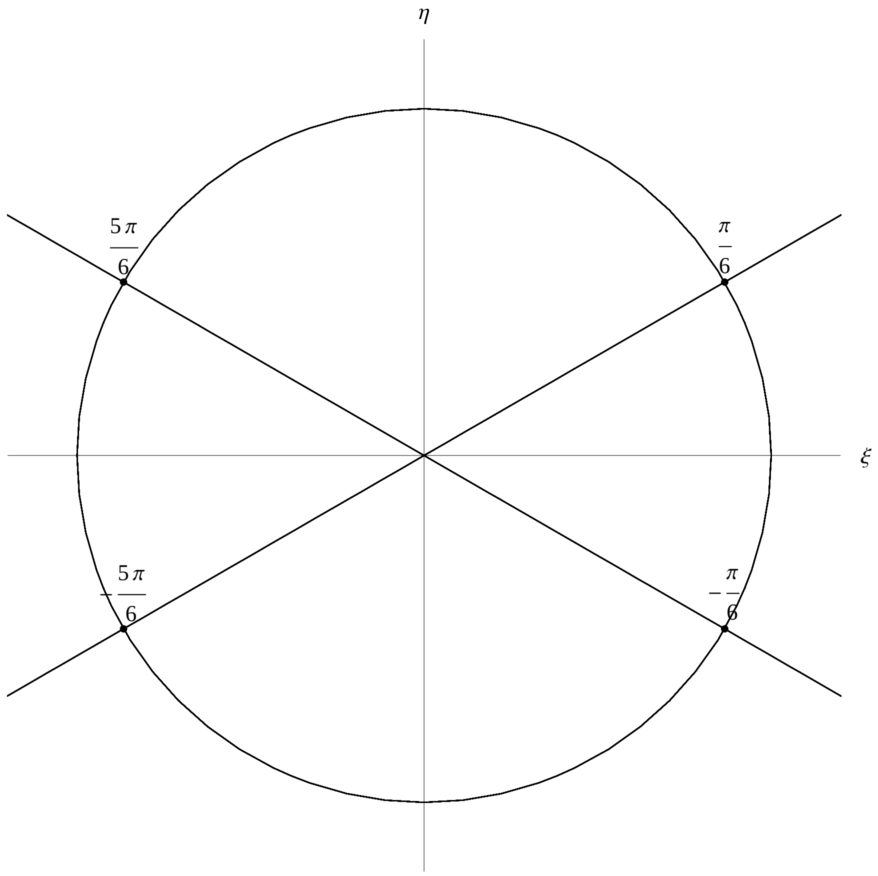

Figura 3: Nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ è $\sin x = \pm\frac{1}{2}$ per $x = \pm\frac{\pi}{6}$, $x = \pm\frac{5}{6}\pi$.

Si noti che le (13) possono essere ricavate dal grafico di fig.4.

Esercizio 13. Risolvere:

$$2\sin^2 x - 1 = 0 \tag{14}$$

Svolgimento. Risolvendo rispetto a $\sin x$:

$$\sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Sappiamo che $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, per cui le soluzioni in $[0, 2\pi]$ sono:

$$x = \frac{\pi}{4}, \ x = \frac{3}{4}\pi, \ x = \frac{5}{4}\pi, \ x = \frac{7}{4}\pi \tag{15}$$

Per trovare le soluzioni in $\mathbb{R}$ osserviamo che le (15) sono "intervallate" di $\pi/2$, quindi:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 14. Risolvere:

$$\tan^2 x - 1 = 0 \tag{16}$$

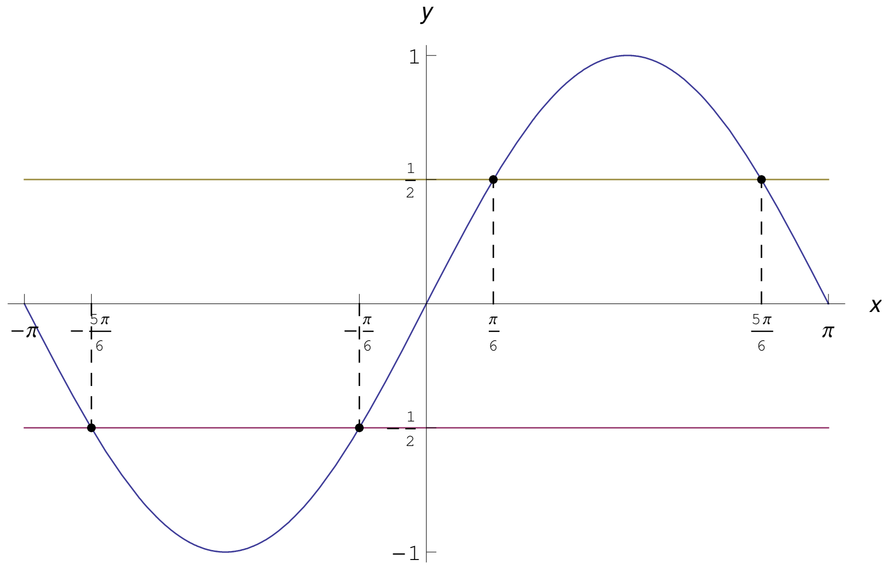

Figura 4: Nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ è $\sin x = \pm\frac{1}{2}$ per $x = \pm\frac{\pi}{6}$, $x = \pm\frac{5}{6}\pi$.

Svolgimento. Risolvendo rispetto a $\tan x$:

$$\tan x = \pm 1$$

da cui:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 15. Risolvere:

$$\cot^2 x - 3 = 0 \tag{17}$$

Svolgimento. Risolvendo rispetto a $\cot x$:

$$\cot x = \pm\sqrt{3}$$

Sappiamo che $\cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, per cui le soluzioni in $[0, \pi]$ sono:

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 16. Risolvere:

$$2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0 \tag{18}$$

Svolgimento. Risolvendo rispetto a $\sin x$:

$$\sin x = -\frac{1}{2}, \quad \sin x = -1$$

In $[0, 2\pi]$ la prima è risolta da $x = \frac{7}{6}\pi$, $x = \frac{11}{6}\pi$. In $\mathbb{R}$ da $x = \frac{7}{6}\pi + k\pi$, $x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$. Le soluzioni della seconda sono $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$. Ne concludiamo che le soluzioni dell'equazione assegnata sono tutti e soli i numeri reali:

$$x = \frac{7}{6}\pi + k\pi, \ x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi, \quad x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$

Esercizio 17. Risolvere:

$$2\sin^2 x - \left(\sqrt{3} + 2\right)\sin x + \sqrt{3} = 0 \tag{19}$$

Svolgimento. Eseguendo il cambio di variabile $y = \sin x$

$$2y^2 - \left(\sqrt{3} + 2\right) y + \sqrt{3} = 0,$$

le cui radici sono:

$$y_{1,2} = \frac{\sqrt{3} + 2 \pm \sqrt{\Delta}}{4},$$

essendo Δ il discriminante:

$$\begin{aligned} \Delta &= 3 + 4\sqrt{3} + 4 - 8\sqrt{3} \\ &= 7 - 4\sqrt{3} \\ &= 4 + 3 - 4\sqrt{3} \\ &= 2^2 - 4\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 \\ &= \left(2 - \sqrt{3}\right)^2, \end{aligned}$$

per cui:

$$y_{1,2} = \frac{2 + \sqrt{3} \pm (2 - \sqrt{3})}{4} = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{cases}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin x = 1$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} &\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \ \ x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \\ &\sin x = 1 \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned}$$

Ne concludiamo che le soluzioni dell'equazione assegnata sono tutti e soli i numeri reali:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \ \ x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 18. Risolvere:

$$2\sin^2 x - \left(\sqrt{3} - 2\right) \sin x - \sqrt{3} = 0 \tag{20}$$

Svolgimento. Eseguendo il cambio di variabile $y = \sin x$

$$2y^2 - \left(\sqrt{3} - 2\right) y - \sqrt{3} = 0,$$

le cui radici sono:

$$y_{1,2} = \frac{\sqrt{3} - 2 \pm \sqrt{\Delta}}{4},$$

essendo Δ il discriminante:

$$\begin{aligned} \Delta &= 3 - 4\sqrt{3} + 4 + 8\sqrt{3} \\ &= 7 + 4\sqrt{3} \\ &= 4 + 3 + 4\sqrt{3} \\ &= 2^2 + 2 \cdot 2\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 \\ &= \left(2 + \sqrt{3}\right)^2, \end{aligned}$$

per cui:

$$y_{1,2} = \frac{\sqrt{3}-2 \pm \left(\sqrt{3}+2\right)}{4} = \begin{cases} -1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\sin x = -1, \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Abbiamo:

$$\sin x = -1 \Longleftrightarrow x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$$
$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

Ne concludiamo che le soluzioni dell'equazione assegnata sono tutti e soli i numeri reali:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \quad x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 19. Risolvere:

$$2\cos^2 x - \left(\sqrt{3}-2\right)\cos x - \sqrt{3} = 0 \tag{21}$$

Svolgimento. Eseguendo il cambio di variabile $y = \cos x$

$$2y^2 - \left(\sqrt{3}-2\right) y - \sqrt{3} = 0,$$

le cui radici sono:

$$y_{1,2} = \begin{cases} -1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\cos x = -1, \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Abbiamo:

$$\cos x = -1 \Longleftrightarrow x = (2k+1)\pi$$
$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longleftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

Ne concludiamo che le soluzioni dell'equazione assegnata sono tutti e soli i numeri reali:

$$x = (2k+1)\pi, \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 20. Risolvere:

$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \tag{22}$$

Svolgimento. Eseguendo il cambio di variabile $y = \cos x$

$$2y^2 - 3y + 1 = 0,$$

le cui radici sono:

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 1 \end{cases}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\cos x = \frac{1}{2}, \quad \cos x = 1$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}
&\cos x = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\
&\cos x = 1 \Longleftrightarrow x = 2k\pi
\end{aligned}$$

Ne concludiamo che le soluzioni dell'equazione assegnata sono tutti e soli i numeri reali:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x = 2k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 21. Risolvere:

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \tag{23}$$

Svolgimento. Eseguendo il cambio di variabile $y = \cos x$

$$2y^2 + y - 1 = 0,$$

le cui radici sono:

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\cos x = -1, \ \ \cos x = \frac{1}{2}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}
&\cos x = -1 \Longleftrightarrow x = (2k+1)\,\pi \\
&\cos x = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi
\end{aligned}$$

Ne concludiamo che le soluzioni dell'equazione assegnata sono tutti e soli i numeri reali:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x = (2k+1)\,\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 22. Risolvere:

$$2\cos^2 x + \left(\sqrt{3}+2\right)\cos x + \sqrt{3} = 0 \tag{24}$$

Svolgimento. Eseguendo il cambio di variabile $y = \cos x$

$$2y^2 + \left(\sqrt{3}+2\right) y + \sqrt{3} = 0,$$

le cui radici sono:

$$y_{1,2} = \frac{-\left(\sqrt{3}+2\right) \pm \sqrt{\Delta}}{4},$$

essendo Δ il discriminante:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left(\sqrt{3}+2\right)^2 - 8\sqrt{3} = 3 + 4\sqrt{3} + 4 - 8\sqrt{3} \\
&= \left(\sqrt{3}\right)^2 - 4\sqrt{3} + 2^2 \\
&= \left(\sqrt{3}-2\right)^2,
\end{aligned}$$

per cui:

$$y_{1,2} = \frac{-\left(\sqrt{3}+2\right) \pm \left(\sqrt{3}-2\right)}{4} = \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 \end{cases}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos x = -1$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} &\Longleftrightarrow x = \pm\frac{5}{6}\pi + 2k\pi \\
\cos x = -1 &\Longleftrightarrow x = (2k+1)\,\pi
\end{aligned}$$

Ne concludiamo che le soluzioni dell'equazione assegnata sono tutti e soli i numeri reali:

$$x = \pm\frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \quad x = (2k+1)\,\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 23. Risolvere:

$$2\cos^2 x - \left(2 - \sqrt{3}\right)\cos x - \sqrt{3} = 0 \tag{25}$$

Svolgimento. Eseguendo il cambio di variabile $y = \cos x$

$$2y^2 - \left(2 - \sqrt{3}\right) y - \sqrt{3} = 0,$$

le cui radici sono:

$$y_{1,2} = \frac{2 - \sqrt{3} \pm \sqrt{\Delta}}{4},$$

essendo Δ il discriminante:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left(2 - \sqrt{3}\right)^2 + 8\sqrt{3} = 2^2 - 4\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 8\sqrt{3} \\
&= 2^2 + 4\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 \\
&= \left(2 + \sqrt{3}\right)^2,
\end{aligned}$$

per cui:

$$y_{1,2} = \frac{-\left(\sqrt{3}+2\right) \pm \left(2+\sqrt{3}\right)}{4} = \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{cases}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos x = 1$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} &\Longleftrightarrow x = \pm\frac{5}{6}\pi + 2k\pi \\
\cos x = -1 &\Longleftrightarrow x = 2k\pi
\end{aligned}$$

Ne concludiamo che le soluzioni dell'equazione assegnata sono tutti e soli i numeri reali:

$$x = \pm\frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \quad x = 2k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 24. Risolvere:

$$2\tan^2 x - 4\sqrt{3}\tan x + 3 = 0 \tag{26}$$

Svolgimento. Eseguendo il cambio di variabile $y = \tan x$

$$3y^2 - 4\sqrt{3}y + 3 = 0,$$

le cui radici sono:

$$y_{1,2} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12-9}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(2 \pm 1) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sqrt{3} \end{array} \right. ,$$

Ripristinando la variabile x:

$$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \tan x = \sqrt{3}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} &\Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ \tan x = \sqrt{3} &\Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{aligned}$$

Ne concludiamo che le soluzioni dell'equazione assegnata sono tutti e soli i numeri reali:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 25. Risolvere:

$$2\cos^2 x - \left(2 - \sqrt{3}\right)\cos x - \sqrt{3} = 0 \tag{27}$$

Svolgimento. Eseguendo il cambio di variabile $y = \cos x$

$$2y^2 - \left(2 - \sqrt{3}\right)y - \sqrt{3} = 0,$$

le cui radici sono:

$$y_{1,2} = \frac{2 - \sqrt{3} \pm \sqrt{\Delta}}{4},$$

essendo Δ il discriminante:

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(2 - \sqrt{3}\right)^2 + 8\sqrt{3} = 2^2 - 4\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 8\sqrt{3} \\ &= 2^2 + 4\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 \\ &= \left(2 + \sqrt{3}\right)^2, \end{aligned}$$

per cui:

$$y_{1,2} = \frac{-\left(\sqrt{3} + 2\right) \pm \left(2 + \sqrt{3}\right)}{4} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{array} \right.$$

Ripristinando la variabile x:

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos x = 1$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} &\Longleftrightarrow x = \pm\frac{5}{6}\pi + 2k\pi \\ \cos x = -1 &\Longleftrightarrow x = 2k\pi \end{aligned}$$

Ne concludiamo che le soluzioni dell'equazione assegnata sono tutti e soli i numeri reali:

$$x = \pm\frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \quad x = 2k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 26. Risolvere:

$$3\cot^2 x - 2\sqrt{3}\cot x - 3 = 0 \tag{28}$$

Svolgimento. Eseguendo il cambio di variabile $y = \cot x$

$$3y^2 - 2\sqrt{3}y - 3 = 0,$$

le cui radici sono:

$$y_{1,2} = \frac{\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}}{3} = \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sqrt{3} \end{cases},$$

Ripristinando la variabile x:

$$\cot x = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \ \cot x = \sqrt{3}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} \cot x = -\frac{\sqrt{3}}{3} &\Longleftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \\ \cot x = \sqrt{3} &\Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{aligned}$$

Ne concludiamo che le soluzioni dell'equazione assegnata sono tutti e soli i numeri reali:

$$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \ x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 27. Risolvere:

$$\cot^2 x - \left(1 + \sqrt{3}\right)\cot x + \sqrt{3} = 0 \tag{29}$$

Svolgimento. Eseguendo il cambio di variabile $y = \cot x$

$$y^2 - \left(1 + \sqrt{3}\right)y + \sqrt{3} = 0,$$

le cui radici sono:

$$y_{1,2} = \frac{1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

dove Δ è il discriminante:

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(1 + \sqrt{3}\right)^2 - 4\sqrt{3} = 1 + 2\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 4\sqrt{3} \\ &= 1 - 2\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 \\ &= \left(1 - \sqrt{3}\right)^2, \end{aligned}$$

per cui:

$$y_{1,2} = \frac{1 + \sqrt{3} \pm \left(1 - \sqrt{3}\right)}{2} = \begin{cases} \sqrt{3} \\ 1 \end{cases}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\cot x = \sqrt{3}, \ \cot x = 1$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} \cot x = \sqrt{3} &\Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ \cot x = 1 &\Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{aligned}$$

Ne concludiamo che le soluzioni dell'equazione assegnata sono tutti e soli i numeri reali:

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \ x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 28. Risolvere:

$$\tan^2 x - \left(\sqrt{3} - 1\right) \tan x - \sqrt{3} = 0 \tag{30}$$

Svolgimento. Eseguendo il cambio di variabile $y = \tan x$

$$y^2 - \left(\sqrt{3} - 1\right) y - \sqrt{3} = 0,$$

le cui radici sono:

$$y_{1,2} = \frac{\sqrt{3} - 1 \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

dove Δ è il discriminante:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left(\sqrt{3} - 1\right)^2 + 4\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{3} + 1 + 4\sqrt{3} \\
&= \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3} + 1 \\
&= \left(\sqrt{3} + 1\right)^2,
\end{aligned}$$

per cui:

$$y_{1,2} = \frac{\sqrt{3} - 1 \pm \left(\sqrt{3} + 1\right)}{2} = \begin{cases} -1 \\ \sqrt{3} \end{cases}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned}
\tan x = -1 &\iff x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\
\tan x = \sqrt{3} &\iff x = \frac{\pi}{3} + k\pi
\end{aligned}$$

Ne concludiamo che le soluzioni dell'equazione assegnata sono tutti e soli i numeri reali:

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$