Interpretazione di Schwinger

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Nella lezione precedente abbiamo visto che l'operazione di misura di una osservabile A relativa a un sistema quanto-meccanico S_q il cui ket di stato al tempo t è:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{N} \underbrace{c_n^{(0)} e^{-\frac{i}{\hbar}E_n}}_{=c_n(t)} |a_n\rangle \tag{1}$$

(per ipotesi l'osservabile A è compatibile con l'osservabile energia), è matematicamente rappresentata dall'operatore di proiezione $\hat{\pi}_{a_k}$:

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{a_k} &: \mathcal{H} \to \mathcal{H} \\ \hat{\pi}_{a_k} &: |\psi(\tau)\rangle \to c_k(\tau)\,|a_k\rangle \in \mathcal{H}_{a_k}, \end{aligned} \tag{2}$$

essendo τ l'istante in cui viene eseguita la misura, mentre $\mathcal{H}_{a_k}$ è l'autospazio dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ appartenente all'autovalore a_k:

$$\mathcal{H}_{a_k} = \left\{ |\alpha\rangle \in \mathcal{H} \mid \hat{A}\,|\alpha\rangle = a_k\,|\alpha\rangle \right\},$$

cioè il sottospazio vettoriale di $\mathcal{H}$ i cui elementi sono gli autovettori di $\hat{A}$ appartenenti all'autovalore a_k. Dal momento che abbiamo assunto lo spettro di $\hat{A}$ non degenere, si ha

$$\dim \mathcal{H}_{a_k} = 1, \tag{3}$$

per cui i vettori di $\mathcal{H}_{a_k}$ differiscono da $|a_k\rangle$ per un inessiale scalare moltiplicativo. La (2) va precisata nel modo seguente:

$$\text{misura di } A \Longrightarrow \exists! k \in \{0,1,2,...,N\} \mid |\psi(\tau)\rangle \to |a_k\rangle \tag{4}$$

Gli operatori di proiezione sono idempotenti:

$$\hat{\pi}_{a_k}^2 = \hat{\pi}_{a_k}, \quad k = 0,1,...,N \tag{5}$$

Infatti:

$$\hat{\pi}_{a_k}^2\,|\psi(\tau)\rangle = \hat{\pi}_{a_k}\left(\hat{\pi}_{a_k}\,|\psi(\tau)\rangle\right) = c_k(\tau)\,\hat{\pi}_{a_k}\,||a_k\rangle\rangle = c_k(\tau)\,|a_k\rangle \tag{6}$$

Fisicamente significa che S_q rimane in $|a_k\rangle$ pur eseguendo successive misure della stessa osservabile. L'*interpretazione di Schwinger*, non è una interpretazione in senso ortodosso, ma è comunque interessante poiché esprime il processo di misura attraverso l'azione di un filtro, come illustrato in fig. 1.

Un'altra proprietà notevole dell'operatore di proiezione è:

$$\sum_{k=1}^{N} \hat{\pi}_{a_k} = \hat{1} \tag{7}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \forall\,|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{N} c_n\,|a_n\rangle \in \mathcal{H}, \quad \left(\sum_{k=1}^{N} \hat{\pi}_{a_k}\right)|\psi\rangle &= \sum_{k=1}^{N} \hat{\pi}_{a_k}\,|\psi\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{N} c_k\,|a_k\rangle = |\psi\rangle \end{aligned} \tag{8}$$

Figura 1: Nell'*interpretazione di Schwinger* il processo di misura di un'osservabile A agisce alla stregua di un "filtro" che lascia passare solo uno degli $N \leq +\infty$ autostati di A.

In notazione di Dirac, l'operatore $\hat{\pi}_{a_k}$ si scrive:

$$\hat{\pi}_{a_k} = |a_k\rangle\langle a_k|\,, \tag{9}$$

e la (7)

$$\sum_{k=1}^{N} |a_k\rangle\langle a_k| = \hat{1}, \tag{10}$$

nota come *relazione di chiusura* o *di completezza*.

Riferimenti bibliografici

[1] Sakurai J.J., 1990. *Meccanica quantistica moderna*. Zanichelli