Il processo di misura visto come un'evoluzione dinamica non deterministica

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

A differenza della lezione precedente, ci riferiamo adesso a un generico sistema quanto-meccanico S_q in regime non relativistico. Se $\hat{A}$ è l'operatore hermitiano (nell'appropriato spazio di Hilbert $\mathcal{H}$), si ha la seguente equazioni agli autovalori:

$$\hat{A}\left|a_n\right\rangle = a_n\left|a_n\right\rangle, \quad a_n \in \sigma\left(\hat{A}\right) \quad \text{per } n = 0, 1, 2, ..., N \leq +\infty \tag{1}$$

Qui abbiamo assunto uno spettro non degenere e puramente discreto. Supponendo che S_q sia soggetto a forze conservative, si ha che l'operatore di evoluzione temporale è (per $t_0 = 0$):

$$\hat{U}\left(t\right) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}, \tag{2}$$

dove l'operatore hamiltoniano $\hat{H}$ non dipende esplicitamente dal tempo. Quindi l'evoluto temporale dello stato iniziale $\left|\psi_0\right\rangle$ si scrive:

$$\left|\psi\left(t\right)\right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\left|\psi_0\right\rangle \tag{3}$$

Se le osservabili A e H sono compatibili, i.e. gli operatori $\hat{A}$ e $\hat{H}$ commutano:

$$\left[\hat{A}, \hat{H}\right] = 0, \tag{4}$$

per una nota proprietà, i predetti operatori hanno un sistema di autovettori simultanei che costituiscono una base ortonormale di $\mathcal{H}$:

$$\begin{cases} \hat{A}\left|a_n\right\rangle = a_n\left|a_n\right\rangle \\ \hat{H}\left|a_n\right\rangle = E_n\left|a_n\right\rangle \end{cases} \tag{5}$$

Nella base $\{\left|a_n\right\rangle\}$ lo sviluppo del ket iniziale è:

$$\left|\psi_0\right\rangle = \sum_{n=0}^{N} c_n^{(0)}\left|a_n\right\rangle, \quad c_n^{(0)} = \left\langle a_n|\psi_0\right\rangle \tag{6}$$

Ne consegue che l'evoluto temporale dello stato inziale è:

$$\left|\psi\left(t\right)\right\rangle = \sum_{n=0}^{N} c_n\left(t\right)\left|a_n\right\rangle, \tag{7}$$

dove

$$c_n\left(t\right) = c_n^{(0)} e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \tag{8}$$

Denotando con $\tau \geq 0$ il generico istante in cui si esegue una misura dell'osservabile A, si ha che l'evoluzione dinamica del ket di stato è data da:

$$\left|\psi\left(t\right)\right\rangle = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N} c_n^{(0)} e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\left|a_n\right\rangle, & \text{se } t \leq \tau \\ \left|a_k\right\rangle, \quad \text{se } t \geq \tau, & k \in \{0, 1, 2, ..., N\} \end{cases} \tag{9}$$

Cioè, per $t < \tau$ il sistema evolve deterministicamente, mentre a $t = \tau$ il sistema passa istantaneamente all'autostato $\left|a_k\right\rangle$, conservando tale stato per ogni $t > \tau$. Il numero reale a_k è il risultato della misura. Dal momento che l'autovettore $|a_k\rangle$ può essere scritto come[1] il risultato dell'applicazione dell'operatore di proiezione $\hat{\pi}_k : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_{E_k}$ ($\mathcal{H}_{E_k}$ è l'autospazio dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ appartenente all'autovalore E_k).

$$\hat{\pi}_k \left|\psi\left(\tau\right)\right\rangle = c_k\left(\tau\right)\left|a_k\right\rangle, \tag{10}$$

ne concludiamo che S_q esibisce due modalità differenti di evoluzione dinamica, riassunte dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \left|\psi\left(t\right)\right\rangle = \hat{U}\left(t\right)\left|\psi_0\right\rangle & \text{(deterministica)} \\ \left|\psi\left(t \geq \tau\right)\right\rangle = \hat{\pi}_k\left|\psi\left(\tau\right)\right\rangle & \text{(non deterministica)} \end{cases} \tag{11}$$

Le predette modalità di evoluzione hanno in comune solo la linearità, e il carattere non deterministico della seconda nasce dalla prescrizione seguente: nello sviluppo del ket di stato

$$\left|\psi\left(t\right)\right\rangle = \sum_{n=0}^{N} c_n\left(t\right)\left|a_n\right\rangle,$$

$\left|c_k\left(\tau\right)\right|^2$ è la probabilità che una misura dell'osservabile A (eseguita a $t = \tau$) fornisca il risultato a_k. In simboli:

$$P\left(A = A_k, \tau\right) = \left|c_k\left(\tau\right)\right|^2 \tag{12}$$

Dalla condizione di normalizzazione del ket di stato, segue:

$$\sum_{k=0}^{N} P\left(A = a_k, \tau\right) = 1,$$

in perfetto accordo con la definizione di probabilità.

Per quanto riguarda l'evoluzione deterministica, sappiamo che l'hamiltoniano è il generatore dell'evoluzione temporale. Infatti, basta guardare l'espressione dell'operatore unitario $\hat{U}\left(t\right)$: se $\hat{H}$ è loperatore nullo, l'evoluzione temporale è la trasformazione identica dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ in sé. Utilizzando un linguaggio impreciso ma efficace, possiamo dire che se il sistema non ha energia non ha evoluzione temporale. A questo punto chiediamoci: cosa rappresenta l'operatore di proiezione $\hat{\pi}_k$ che determina il *collasso* del ket di stato in uno degli autostati dell'osservabile che stiamo misurando? Risponderemo a questa domanda in una lezione successiva.

[1] A meno di un inessenziale fattore moltiplicativo.

Riferimenti bibliografici

[1] Sakurai J.J., 1990. *Meccanica quantistica moderna*. Zanichelli