L'operazione di misura determina una discontinuità di prima specie nel vettore di stato

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Nella lezione precedente abbiamo visto che l'evoluzione del ket di stato di un oscillatore armonico unidimensionale è data da

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\psi_0\rangle, \tag{1}$$

dove $\hat{H}$ è l'operatore hamiltoniano, mentre $|\psi_0\rangle$ è lo stato iniziale. Qui abbiamo assunto $t_0 = 0$. Ricordiamo che l'equazione agli autovalori

$$\hat{H}|E\rangle = E|E\rangle, \tag{2}$$

fornisce [1]:

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

I corrispondenti autoket $|n\rangle$ costituiscono una base ortonormale dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ associato al sistema. Con ovvio significato dei simboli si ha:

$$\{|n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}} \mid \langle n|n'\rangle = \delta_{nn'} \tag{4}$$

Denotiamo con $\left(c_0^{(0)}, c_1^{(0)}, ..., c_n^{(0)}, ...\right)$ le componenti del vettore $|\psi_0\rangle$ nella predetta base. Cioè

$$|\psi_0\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n^{(0)}|n\rangle \tag{5}$$

Dal momento che $|\psi_0\rangle$ è normalizzato, i.e. ha norma unitaria, si ha che le componenti $c_n^{(0)}$ soddisfano la condizione:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left|c_n^{(0)}\right|^2 = 1 \tag{6}$$

Sostituendo la (5) nella (1):

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^{(0)}|n\rangle \underset{e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\text{ è lineare}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n^{(0)} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|n\rangle \\ &\underset{\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n^{(0)} e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}|n\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n^{(0)} e^{-i\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)t}|n\rangle\end{aligned} \tag{7}$$

Cioè

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(t)|n\rangle, \tag{8}$$

dove

$$c_n(t) = c_n^{(0)} e^{-i\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)t} \tag{9}$$

Ne segue che le componenti del ket $|\psi(t)\rangle$ differiscono dalle componenti del ket iniziale per un fattore di fase dipendente dal tempo. Quindi:

$$|c_n(t)| = \left|c_n^{(0)}\right|, \quad \forall t \in [0, +\infty),$$

e ciò garantisce la conservazione della norma del vettore di stato. Senza perdita di generalità, supponiamo che lo stato iniziale sia

$$|\psi_0\rangle = c_0^{(0)}|0\rangle + c_1^{(0)}|1\rangle \tag{10}$$

cioè una sovrapposizione lineare dello stato fondamentale (energia $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$) e del primo livello eccitato (energia $E_1 = \frac{3\hbar\omega}{2}$). Lo stato a tutti i tempi è

$$|\psi(t)\rangle = c_0(t)|0\rangle + c_1(t)|1\rangle, \quad \forall t \in [0, +\infty), \tag{11}$$

dove

$$c_0(t) = c_0^{(0)} e^{-\frac{1}{2}i\omega t}, \quad c_1(t) = c_1^{(0)} e^{-\frac{3}{2}i\omega t} \tag{12}$$

Le (12) sono funzioni della variabile reale t. Precisamente:

$$\begin{aligned} c_0 &: t \in [0, +\infty) \to c_0^{(0)} e^{-\frac{1}{2}i\omega t} \\ c_1 &: t \in [0, +\infty) \to c_1^{(0)} e^{-\frac{1}{2}i\omega t} \end{aligned} \tag{13}$$

Sono manifestamente continue. Infatti, comunque prendiamo $\tau \in [0, +\infty)$, riesce:

$$\lim_{t \to \tau} c_n(t) = c_n(\tau), \tag{14}$$

da cui la continuità del vettore (11):

$$\lim_{t \to \tau} |\psi(t)\rangle = |\psi(\tau)\rangle \tag{15}$$

Se invece τ è un istante in cui viene eseguita una misura dell'energia, si ha che l'evoluzione temporale per $t \geq \tau$ non è più governata dall'operatore $\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$ ma da uno degli operatori di proiezione $\hat{\pi}_0$, $\hat{\pi}_1$, onde:

$$|\psi(\tau)\rangle = \hat{\pi}_k |\psi(t)\rangle = c_k(t)|k\rangle, \quad k \in \{0, 1\} \tag{16}$$

Normalizzando si ottiene:

$$|\psi(\tau)\rangle = |k\rangle \tag{17}$$

Per $t > \tau$ entra in gioco nuovamente $\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$, per cui:

$$|\psi(t > \tau)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|k\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t}|k\rangle \tag{18}$$

A meno dell'inessenziale fattore di fase $e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t}$:

$$\psi(t \geq \tau) = |k\rangle \tag{19}$$

Per quanto riguarda il comportamento della componente $c_{n \neq k}(t)$, si ha

$$c_{n \neq k}(t) = \begin{cases} c_n^{(0)} e^{-i\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)t}, & \text{se } t \leq \tau \\ 0, & \text{se } t \geq \tau \end{cases} \tag{20}$$

Ne consegue che l'istante di misura τ è un punto di discontinuità di prima specie per la funzione $c_{n \neq k}(t)$, e quindi per il vettore di stato:

$$|\psi(t)\rangle = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^{(0)} e^{-i\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)t}|n\rangle, & \text{se } t \leq \tau \\ |k\rangle, & \text{se } t \geq \tau \end{cases}$$

Riferimenti bibliografici

[1] Sakurai J.J., 1990. *Meccanica quantistica moderna*. Zanichelli