Il caso dell'oscillatore armonico unidimensionale

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

1 Meccanica Classica

Consideriamo un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω. Come è noto, la funzione hamiltoniana è:

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{1}$$

Questo sistema è manifestamente conservativo, in quanto H non dipende esplicitamente dal tempo. Le equazioni del moto nella forma hamiltoniana, sono:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial}{\partial p} H(x,p) \\ \dot{p} = -\frac{\partial}{\partial x} H(x,p) \end{cases}, \tag{2}$$

cioè

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = -m\omega^2 x \end{cases} \tag{3}$$

Derivando primo e secondo membro della prima rispetto al tempo:

$$\ddot{x} = \frac{\dot{p}}{m} \Longrightarrow \dot{p} = m\ddot{x}, \tag{4}$$

che sostituita nelle seconda delle (3):

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{5}$$

Se t_0 è l'istante iniziale, abbiamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = \frac{p_0}{m} \end{cases}, \tag{6}$$

dove x_0, e p_0 sono rispettivamente la posizione iniziale e l'impulso iniziale. L'integrale generale è:

$$x(t) = A\cos(\omega t - \varphi), \quad \forall A, \varphi \in \mathbb{R},$$

essendo A, φ costanti di integrazione. Assumendo $t_0 = 0$:

$$\begin{cases} A\cos\varphi = x_0 \\ \omega A \sin\varphi = \frac{p_0}{m} \end{cases}, \tag{7}$$

da cui

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{p_0^2}{m^2\omega^2}}, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{p_0}{m\omega x_0}\right) \tag{8}$$

Segue che l'unica soluzione del problema di Cauchy (6) è:

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{p_0^2}{m^2\omega^2}} \cos\left[\omega t - \arctan\left(\frac{p_0}{m\omega x_0}\right)\right] \tag{9}$$

2 Meccanica quantistica

Nel caso quantistico, l'equazione da risolvere è l'equazione di Schrödinger che in forma operatoriale si scrive:

$$\hat{H} \left| \psi \left(t \right) \right\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} \left| \psi \left(t \right) \right\rangle , \tag{10}$$

dove $\hat{H} = H \left(\hat{x}, \hat{p} \right)$ è l'operatore hamiltoniano, essendo $\hat{x}$, $\hat{p}$ gli operatori corrispondenti alle osservabili posizione x e impulso p. Il vettore $\left| \psi \left(t \right) \right\rangle$ è il vettore di stato ed è un elemento normalizzato appartenente allo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ associato al sistema. La condizione di normalizzazione si scrive banalmente:

$$\left\langle \psi \left(t \right) \right| \left. \psi \left(t \right) \right\rangle = 1, \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$$

Supponiamo che inizialmente l'oscillatore sia preparato in uno stato iniziale $\left| \psi_0 \right\rangle$ che appartenendo allo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, deve potersi esprimere come combinazione lineare dei ket di base

$$\left\{ \left| n \right\rangle \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Quindi:

$$\left| \psi_0 \right\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n^{(0)} \left| n \right\rangle \tag{11}$$

Deve essere

$$\left\langle \psi_0 | \psi_0 \right\rangle = 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \left| c_n^{(0)} \right|^2 = 1 \tag{12}$$

Ovviamente nella (11) non è necessario che tutti i coefficienti siano non nulli. Un esempio tipico potrebbe essere:

$$\left| \psi_0 \right\rangle = c_0^{(0)} \left| 0 \right\rangle + c_1^{(0)} \left| 1 \right\rangle , \tag{13}$$

che è una sovrapposizione lineare del livello fondamentale e del primo livello eccitato. La (10) con la condizione iniziale (11) compone il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left| \psi \left(t \right) \right\rangle = -\frac{i}{\hbar} \hat{H} \left| \psi \left(t \right) \right\rangle \\ \left| \psi \left(t_0 \right) \right\rangle = \left| \psi_0 \right\rangle \end{cases} \tag{14}$$

Osservando che $\hat{H}$ non dipende esplicitamente dal tempo, si ha che l'equazione differenziale si integra immediatamente. L'integrale generale è

$$\left| \psi \left(t \right) \right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \left| C \right\rangle ,$$

dove $\left| C \right\rangle$ è un vettore costante (costante di integrazione). Imponendo la condizione iniziale:

$$\left| \psi_0 \right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t_0} \left| C \right\rangle \Longrightarrow \left| C \right\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t_0} \left| \psi_0 \right\rangle \tag{15}$$

Ne consegue che l'unica soluzione del problema di Cauchy (14) è:

$$\left| \psi \left(t \right) \right\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \left(t - t_0 \right)} \left| \psi_0 \right\rangle , \tag{16}$$

che può essere scritta come

$$\left| \psi \left(t \right) \right\rangle = \hat{U} \left(t, t_0 \right) \left| \psi_0 \right\rangle , \tag{17}$$

dove $\hat{U} \left(t, t_0 \right)$ è l'operatore di evoluzione temporale

$$\hat{U} \left(t, t_0 \right) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \left(t - t_0 \right)}, \tag{18}$$

che è manifestamente unitario:

$$\hat{U}(t,t_0)\,\hat{U}^\dagger(t,t_0) = \hat{U}^\dagger(t,t_0)\,\hat{U}(t,t_0) = \hat{1} \tag{19}$$

L'evoluzione temporale è, quindi, una trasformazione unitaria dello spazio di Hilbert associato al sistema. L'analogo euclideo di una trasformazione unitaria e una trasformazione ortogonale, cioè una rotazione. Quindi, possiamo asserire che l'evoluzione temporale è descritta attraverso una rotazione nello spazio di Hilbert associato al sistema. Ciò è vitale, perché le rotazioni la norma dei vettori, e quest'ultima è collegata alla normalizzazione. Concludiamo osservando che l'evoluzione temporale dello stato quantistico è deterministica, in quanto unica soluzione del problema di Cauchy (14).

In un numero successivo studieremo in dettaglio l'operazione di misura dell'energia per un oscillatore il cui stato iniziale è dato dalla (13).