
Il caso dell'oscillatore armonico unidimensionale. Confronto con la meccanica classica

Marcello Colozzo – <http://www.extrabyte.info>

Nell'[articolo precedente](#) abbiamo visto una sommaria descrizione del comportamento di un oscillatore armonico quantistico. Classicamente, tale sistema ha un'evoluzione dinamica regolata dall'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$\ddot{x} + m\omega^2 x = 0 \quad (1)$$

Per assegnate condizioni iniziali, l'evoluzione temporale è data dalla soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \ddot{x} + m\omega^2 x = 0 \\ x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = \frac{p_0}{m} \end{cases} \quad (2)$$

Tale problema ammette un'unica soluzione

$$x = x(t), \quad t \in [t_0, +\infty), \quad (3)$$

che è appunto, l'equazione oraria del moto. In altri termini, lo stato iniziale $(x_0, \frac{p_0}{m})$ determina univocamente lo stato a tutti i tempi. Nel caso quantistico, invece, la relazione di indeterminazione

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (4)$$

applicata all'istante iniziale impedisce la conoscenza dello stato $(x_0, \frac{p_0}{m})$ che a sua volta, implica una non unicità delle soluzioni del problema di Cauchy (2). Ne consegue che nel caso quantistico è impossibile determinare l'equazione oraria del tipo (3) e quindi la traiettoria seguita dalla particella¹. Ciò è valido per un qualunque sistema quanto-meccanico. Tale circostanza spinse i fisici che formularono la Meccanica Quantistica a "spostare" l'attenzione dallo spazio euclideo in cui si svolge il moto a un per così dire, nebuloso [spazio di Hilbert](#). Nello spazio euclideo ogni punto può rappresentare la posizione di una particella. In uno spazio di Hilbert, invece, ogni punto definisce lo *stato quantistico* del sistema. Più precisamente, le coordinate $(c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$ di un generico punto di uno spazio di Hilbert sono le cosiddette ampiezze di probabilità, nel senso che $|c_k|^2$ è la probabilità che una misura di un'assegnata osservabile (operatore autoaggiunto nello spazio di Hilbert) fornisca un determinato valore. Se non si eseguono misure, lo stato è descritto da un oggetto del tipo:

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |a_n\rangle \quad (5)$$

¹La particella è comunque vincolata all'asse x , per cui la traiettoria è un segmento. Ciò che non si conosce, è la legge oraria $x = x(t)$.