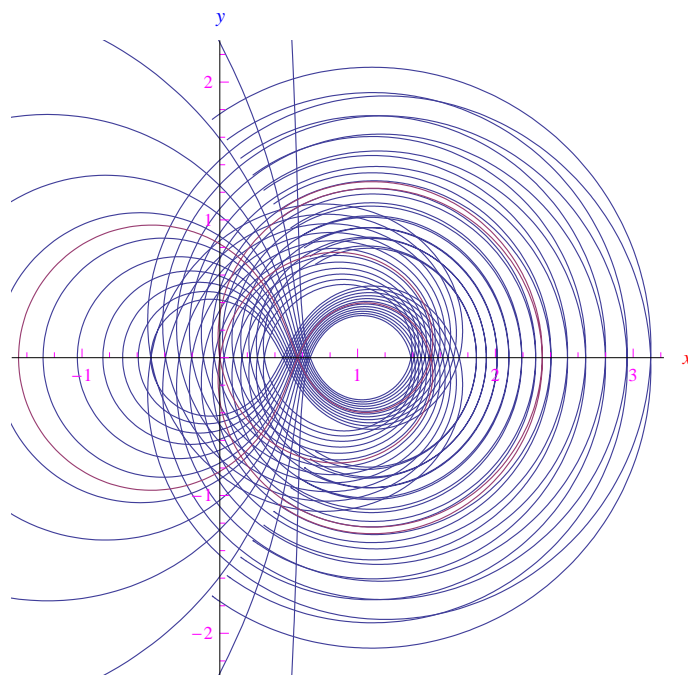


Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x) dx \quad \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

Interpretazione geometrica e meccanica dell'ipotesi di Riemann

Marcello Colozzo



Indice

1	Famiglia di curve piane ad un parametro	2
2	Regolarità delle curve	3
3	Il fenomeno di Lehmer	3
4	Interpretazione meccanica	5

1 Famiglia di curve piane ad un parametro

Sia $\zeta(\sigma + it)$ la funzione zeta di Riemann, avendo separato la parte reale dalla parte immaginaria della variabile indipendente. Come è noto, gli zeri non banali cadono nella striscia critica $(0, 1) \times (-\infty, +\infty)$, per cui parametrizziamo la parte reale in $\lambda \in (0, 1)$. In un piano cartesiano Oxy è univocamente definita la famiglia di curve piane:

$$\mathcal{F} = \{ \gamma_\lambda : x = x(t, \lambda), y = y(t, \lambda), t \in (-\infty, +\infty), \text{ per un assegnato } \lambda \in (0, 1) \} \quad (1)$$

essendo

$$x(t, \lambda) = \operatorname{Re} \zeta(\lambda + it), \quad y(t, \lambda) = \operatorname{Im} \zeta(\lambda + it), \quad t \in (-\infty, +\infty) \quad (2)$$

In fig. 1 sono tracciate alcune curve della predetta famiglia. Quella più marcata è individuata da $\lambda_0 = 1/2$, e notiamo che ha un punto multiplo nell'origine, in conseguenza di un famoso teorema dimostrato da Hardy, secondo cui sulla *retta critica* nel piano complesso (σ, it) di rappresentazione parametrica

$$\sigma(\tau) = \frac{1}{2}, \quad t(\tau) = \tau, \quad \tau \in (-\infty, +\infty)$$

cadono infiniti zeri non banali di $\zeta(\sigma + it)$.

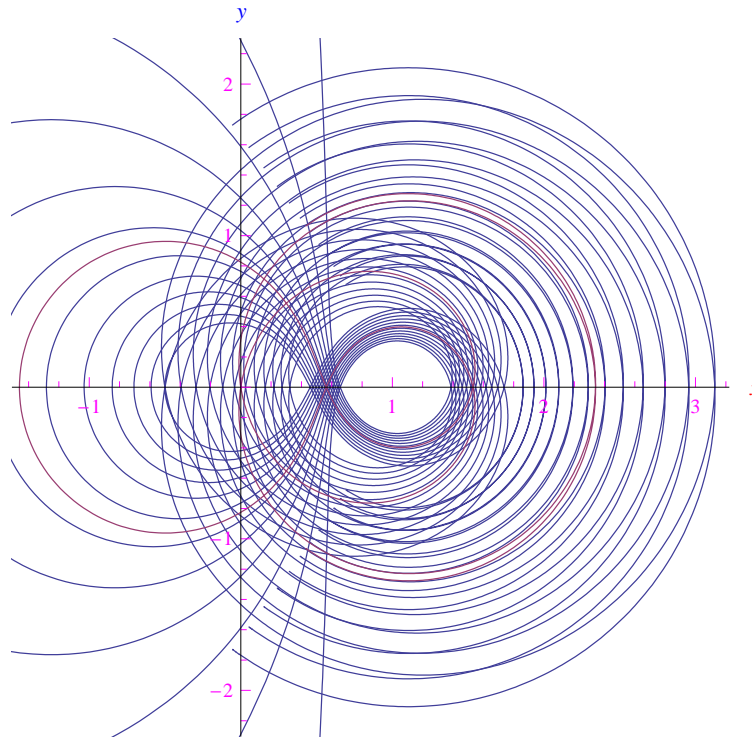


Figura 1: Alcune curve della famiglia (1).

Osserviamo banalmente che la rappresentazione parametrica di singola curva non è elementarmente esprimibile, giacché le funzioni $x(t, \lambda), y(t, \lambda)$ sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria della restrizione della funzione zeta sulla seguente retta del piano complesso:

$$\sigma(\tau) = \lambda, \quad t(\tau) = \tau, \quad \tau \in (-\infty, +\infty) \quad (3)$$

e la funzione zeta è ivi definita per continuazione analitica della somma della serie di Dirichlet:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1 \quad (4)$$

2 Regolarità delle curve

Per quanto precede, non è possibile studiare la regolarità delle curve della famiglia \mathcal{F} , in quanto non disponiamo dell'espressione analitica della rappresentazione parametrica. Vale comunque la pena eseguire alcuni esperimenti computazionali in ambiente **Mathematica**. Rileviamo, ad esempio, l'esistenza di un punto cuspidale per la curva

$$\gamma_0 : x = x\left(t, \frac{1}{2}\right), \quad y = y\left(t, \frac{1}{2}\right) \tag{5}$$

come mostrato in fig. 2, dove l'arco di curva corrisponde all'intervallo del parametro $t \in [7004.1, 7005.32]$.

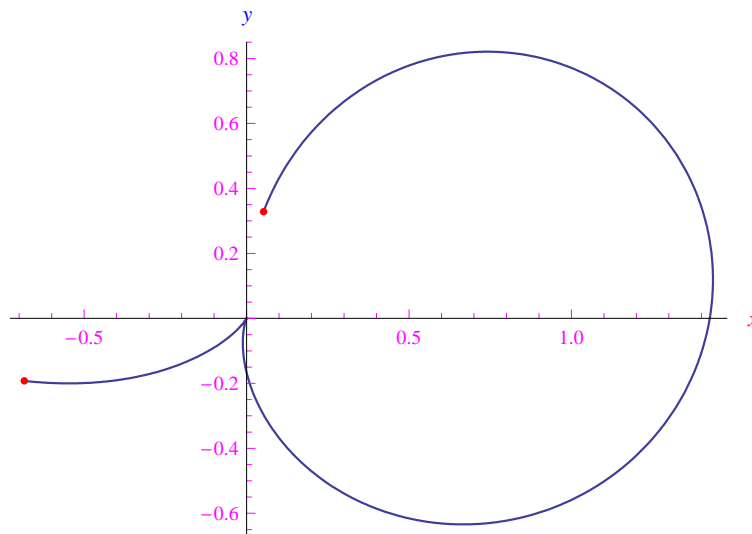


Figura 2: Punto cuspidale per γ_0 .

Il punto cuspidale è ancora presente per le curve

$$\gamma_\varepsilon : x = x\left(t, \frac{1}{2} + \varepsilon\right) + \quad y = y\left(t, \frac{1}{2} + \varepsilon\right), \quad 0 < |\varepsilon| \ll 1$$

come ad esempio per $\varepsilon = 10^{-2}$ (fig. 3). Qui la curva non passa per l'origine.

Se ci allontaniamo progressivamente da $\lambda_0 = \frac{1}{2}$, le curve recuperano la regolarità (fig. 4).

3 Il fenomeno di Lehmer

Il punto cuspidale di (5) è generato dalla presenza di due zeri della funzione ζ molto “vicini” (*fenomeno di Lehmer*). Per mostrare ciò, è preferibile plottare la funzione di Riemann-Siegel:

$$Z(t) = e^{i\vartheta t} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right),$$

dove ϑ è la funzione theta di Riemann-Siegel. Il vantaggio risiede nel fatto che $Z(t)$ è una funzione reale della variabile reale t , e ha gli stessi zeri della ζ . In fig. 5 riportiamo l'andamento di $Z(t)$ per $t \in [7004.1, 7005.32]$, per poi ingrandire il grafico in modo da rendere visibili gli zeri vicini (fig. 6).

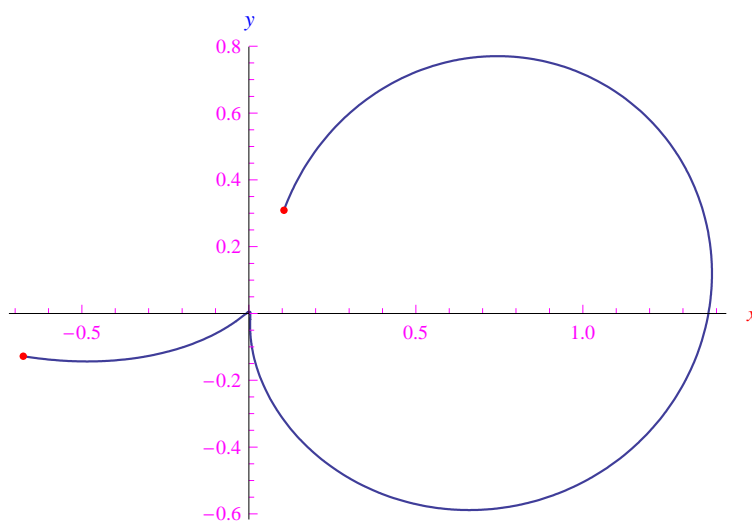


Figura 3: Punto cuspidale per $\gamma_{\epsilon=10^{-2}}$.

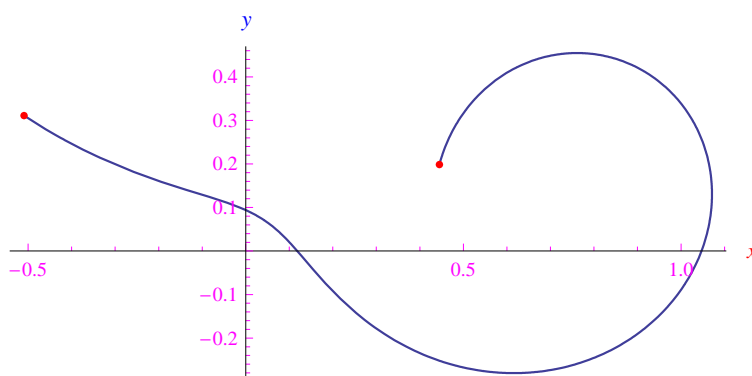


Figura 4: Regolarità di $\gamma_{\epsilon=10^{-1}}$.

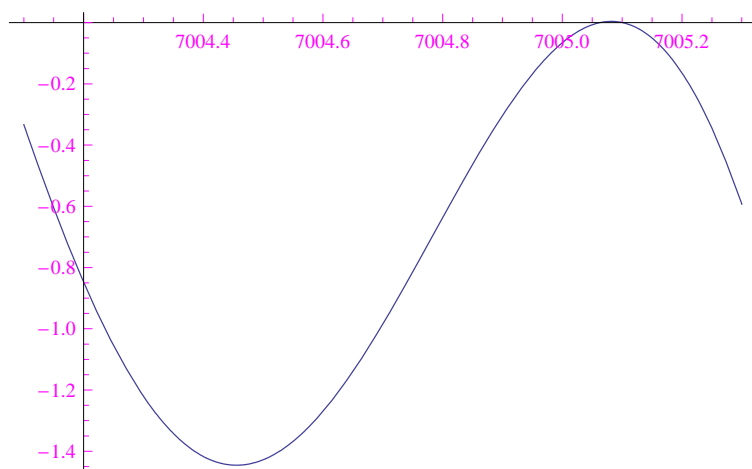


Figura 5: Andamento della funzione di Riemann-Siegel per $t \in [7004.1, 7005.32]$.

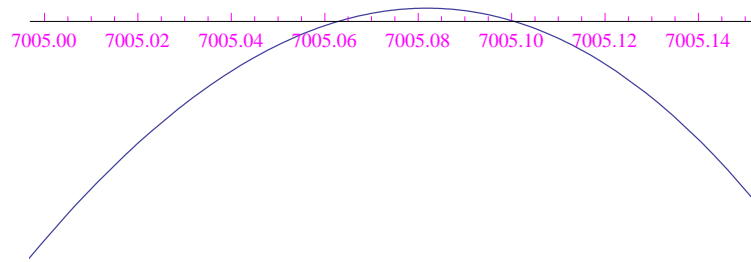


Figura 6: Andamento “ingrandito” della funzione di Riemann-Siegel per $t \in [7004.1, 7005.32]$. Si notino gli zeri in rapida successione.

4 Interpretazione meccanica

Nulla ci impedisce di interpretare cinematicamente le (2), nel senso che costituiscono le equazioni orarie del moto di una particella nel piano Oxy . Nel caso particolare di $\lambda_0 = \frac{1}{2}$, otteniamo la traiettoria riportata in (quattro istanti successivi) fig. 7.

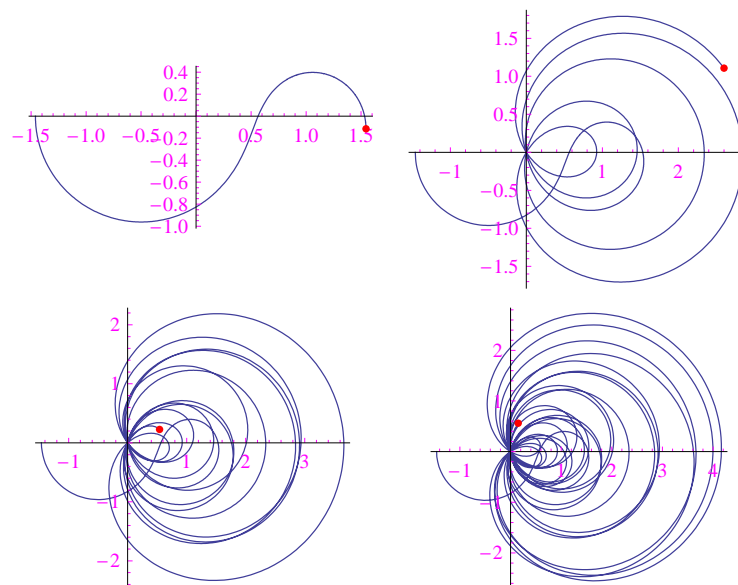


Figura 7: Traiettoria della particella.

La particella passa infinite volte per l’origine. Infatti, per il teorema di Hardy esistono infiniti zeri non della funzione zeta lungo la retta critica ($\lambda_0 = \frac{1}{2}$). Progressivamente la traiettoria si allarga ma il moto non è infinito, poiché l’esistenza di infiniti zeri forza la particella a ripassare per l’origine. Ne consegue che tale sistema fisico non conserva l’energia meccanica, per cui è sottoposto a un campo di forze dipendente dal tempo. Più precisamente, l’hamiltoniana può scriversi:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}, t)$$

dove $V(\mathbf{x}, t) \equiv V(x, y, t)$ è l’energia potenziale.