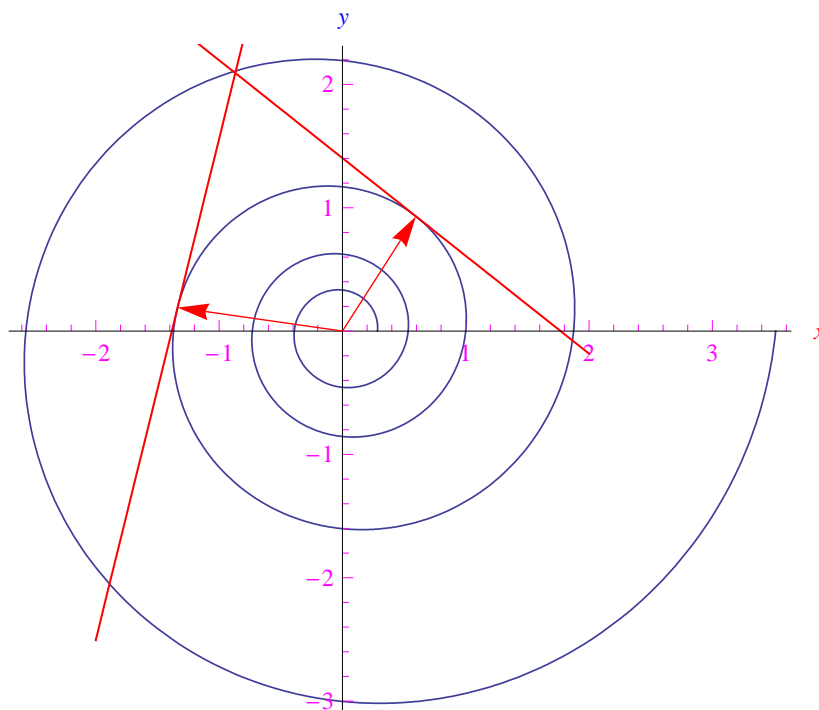


Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x) dx \quad \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

Studio di curve piane in coordinate polari

Marcello Colozzo



Indice

1	Introduzione	2
1.1	Spirale logaritmica	2
1.2	Spirale di Archimede	5
1.3	Spirale di Archimede generalizzata	6
1.4	Lemniscata di Bernoulli	9
1.5	Approssimazione lineare a tratti di una curva piana	11

Capitolo 1

Introduzione

L'equazione che rappresenta una curva in un assegnato sistema di coordinate, può assumere forme differenti. Ad esempio, si può considerare il grafico di una funzione $f(x)$:

$$\gamma : y = f(x) \quad (1.1)$$

Diversamente, la curva può essere data in forma parametrica:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [a, b], \quad (1.2)$$

o in forma implicita:

$$f(x, y) = 0 \quad (1.3)$$

In quest'ultimo caso si cerca di “forzare” la variabile y esprimendola in funzione di x , utilizzando il [teorema del Dini](#). Di particolare interesse sono le curve in coordinate polari. Precisamente, assegnato un riferimento polare con polo nell'origine del corrispondente riferimento cartesiano $\mathcal{R}(Oxy)$ e asse polare coincidente con l'asse x , l'equazione che rappresenta una curva piana in coordinate polari è:

$$r = r(\varphi), \quad \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2] \quad (1.4)$$

dove (r, φ) sono rispettivamente il raggio vettore e l'anomalia, ovvero le coordinate polari. Rammemtiamo le equazioni che legano queste ultime alle coordinate cartesiane:

$$x(r, \varphi) = r \cos \varphi, \quad y(r, \varphi) = r \sin \varphi \quad (1.5)$$

1.1 Spirale logaritmica

La *spirale logaritmica* ha equazione:

$$r = ae^{b\varphi}, \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}, \quad (1.6)$$

essendo $b > 0$. La sostituzione della (1.6) nelle (1.5) restituisce una rappresentazione parametrica della spirale logaritmica:

$$x(\varphi) = ae^{b\varphi} \cos \varphi, \quad y(\varphi) = ae^{b\varphi} \sin \varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad (1.7)$$

che è manifestamente regolare. Dalla (1.6) ricaviamo

$$\varphi = \frac{1}{b} \ln \left(\frac{r}{a} \right), \quad (1.8)$$

per cui

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \varphi(r) = -\infty, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi(r) = +\infty \quad (1.9)$$

Inoltre

$$\begin{aligned} r = a &\implies \varphi = 0 \\ r > a &\implies \varphi > 0 \\ r < a &\implies \varphi < 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Inoltre dalla **monotonia** di $r(\varphi)$ (cfr. eq.(1.6)) segue che al crescere di φ (quindi compiendo rotazioni in senso antiorario) il vettore posizione

$$(x(\varphi), y(\varphi))$$

del generico punto P della spirale, descrive infinite spire progressivamente più ampie. Viceversa, eseguendo rotazioni in senso opposto, le spire avvolgono l'origine, e:

$$\lim_{\varphi \rightarrow -\infty} r(\varphi) = 0$$

Ne consegue che il polo O del riferimento polare (r, φ) ovvero l'origine del riferimento cartesiano, è un punto asintotico della spirale logaritmica. Ad esempio, per $a = 1$, $b = 1/10$, otteniamo l'andamento riportato in fig. 1.1

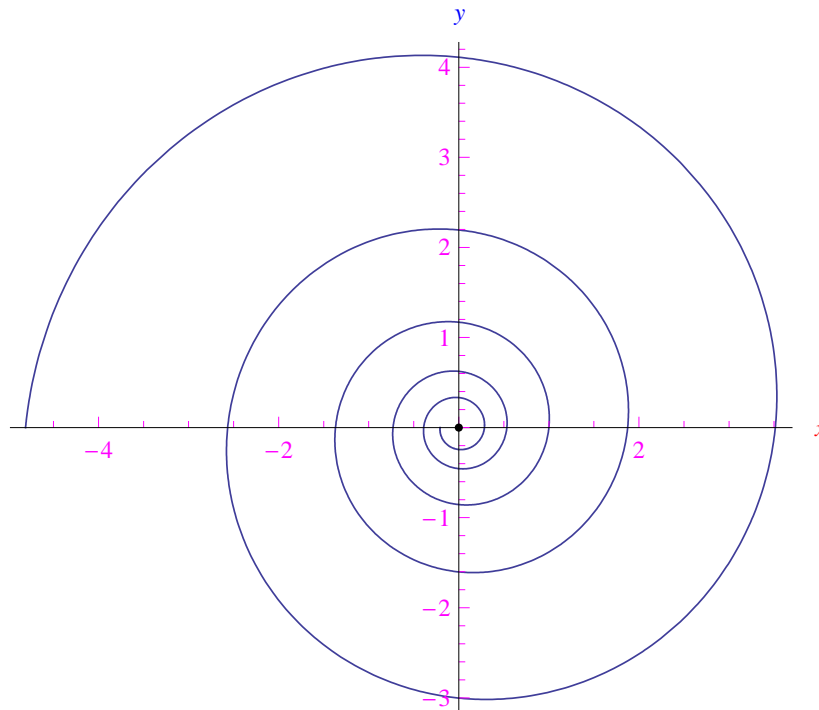


Figura 1.1: Spirale logaritmica $r = e^{\varphi/10}$.

La spirale logaritmica verifica una proprietà notevole, espressa dal seguente teorema:

Teorema 1 *Sia P un punto variabile sulla spirale logaritmica. La retta tangente alla curva in P , interseca il raggio vettore secondo un angolo costante.*

Dimostrazione. Una coppia ordinata di numeri direttori della retta tangente $\tau(\varphi)$ nel generico punto $P(x(\varphi), y(\varphi))$ è

$$\lambda(\varphi) = x'(\varphi), \quad \mu(\varphi) = y'(\varphi) \quad (1.11)$$

Cioè

$$\begin{aligned} \lambda(\varphi) &= abe^{b\varphi} \cos \varphi - ae^{b\varphi} \sin \varphi \\ \mu(\varphi) &= abe^{b\varphi} \sin \varphi + ae^{b\varphi} \cos \varphi \end{aligned} \quad (1.12)$$

Come è noto, i numeri direttori sono le componenti di un vettore parallelo alla retta assegnata, per cui poniamo:

$$\mathbf{v}(\varphi) = (abe^{b\varphi} \cos \varphi - ae^{b\varphi} \sin \varphi) \mathbf{i} + (abe^{b\varphi} \sin \varphi + ae^{b\varphi} \cos \varphi) \mathbf{j}, \quad \forall \varphi \in \mathbb{R} \quad (1.13)$$

essendo \mathbf{i}, \mathbf{j} i versori degli assi coordinati x, y . Il raggio vettore (o vettore posizione) è:

$$\mathbf{r}(\varphi) = r \cos \varphi \mathbf{i} + r \sin \varphi \mathbf{j} \quad (1.14)$$

L'angolo tra $\mathbf{r}(\varphi)$ e $\mathbf{v}(\varphi)$ è dato da

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{r}(\varphi) \cdot \mathbf{v}(\varphi)}{|\mathbf{r}(\varphi)| |\mathbf{v}(\varphi)|} \quad (1.15)$$

Sviluppando il secondo membro ed eseguendo le dovute semplificazioni, si ha:

$$\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}, \quad (1.16)$$

onde l'asserto. ■

Segue immediatamente il corollario:

Corollario 2 *L'angolo che la retta tangente alla spirale logaritmica $r = ae^{b\varphi}$ forma con il raggio vettore, è indipendente da a . Segue che tutti le curve della famiglia:*

$$\mathcal{F} = \{ \gamma_\alpha : r = ae^{b\varphi} \mid 0 < a < +\infty, b = b_0 \},$$

intersecano il raggio vettore sotto lo stesso angolo.

In fig. 1.2 è illustrato il teorema 1. La retta tangente “sembra” formare un angolo di $\pi/2$ con il raggio vettore. Il valore esatto si ricava dalla (1.16), osservando che è $b = 1/10$:

$$\cos \alpha \simeq 0.0995 \implies \alpha \approx 1.47 \rightarrow 84^\circ.28$$

Dalla (1.16)

$$\begin{aligned} 0 < b \ll 1 &\implies \cos \alpha \simeq 0 \implies \alpha \simeq \frac{\pi}{2} \\ b \gg 1 &\implies \cos \alpha \simeq 1 \implies \alpha \simeq 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

Cioè nel limite per $b \rightarrow +\infty$ il raggio vettore è parallelo alla retta tangente. È chiaro che si tratta di un risultato puramente formale, giacché nel predetto limite non abbiamo più una funzione $r(\varphi)$ nel senso ordinario del termine. Il limite opposto, invece, restituisce una circonferenza di centro l'origine e raggio a , la cui equazione polare è

$$r = a$$

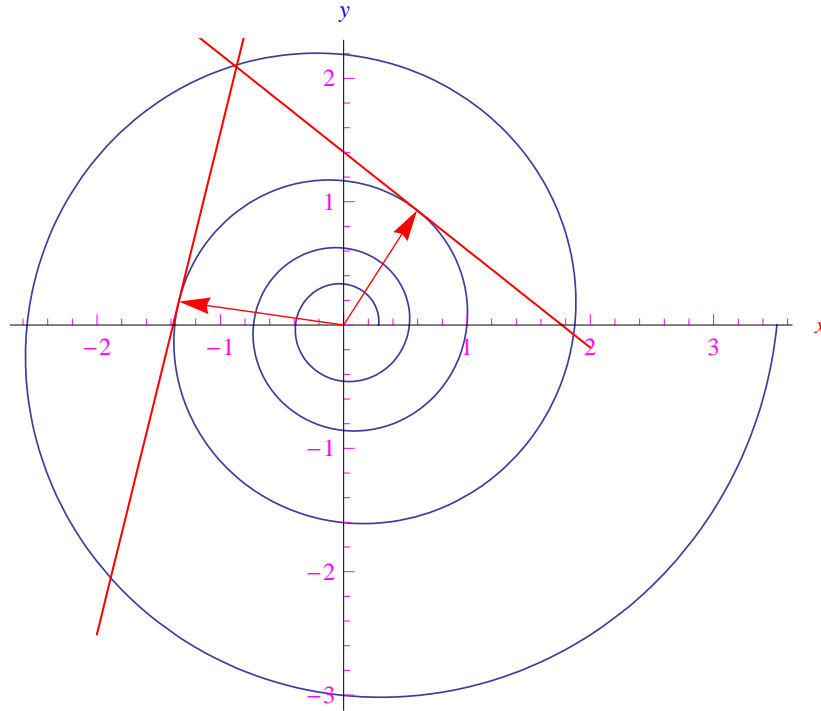


Figura 1.2: La retta tangente a $r = e^{\varphi/10}$ forma con il raggio vettore un angolo costante $\alpha \simeq 84^\circ.28$.

1.2 Spirale di Archimede

La *spirale di Archimede* ha equazione polare:

$$r = a\varphi, \quad \forall \varphi \in [0, +\infty), \quad (1.18)$$

dove $a > 0$. Sostituendo la (1.18) nelle (1.5) otteniamo la seguente rappresentazione parametrica:

$$x(\varphi) = a\varphi \cos \varphi, \quad y(\varphi) = a\varphi \sin \varphi, \quad \varphi \in [0, +\infty) \quad (1.19)$$

A differenza della spirale logaritmica in cui il raggio vettore r cresce esponenzialmente con l'anomalia φ , in quella di Archimede r è funzione lineare ed omogenea di φ , cosicchè invertendo la $r(\varphi)$ data dalla (1.18), si ha

$$\varphi(0) = 0 \quad (1.20)$$

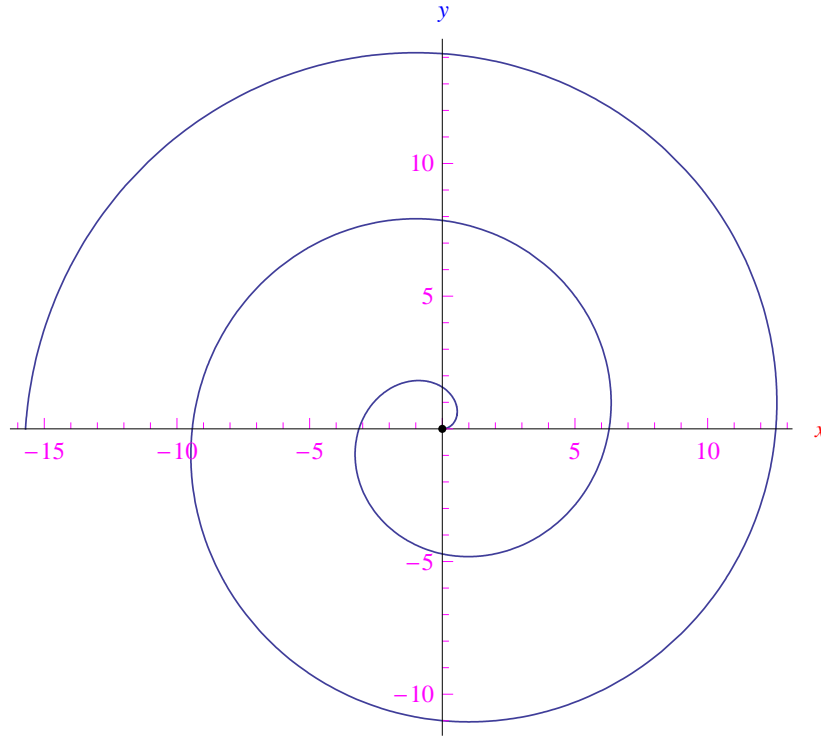
Ne consegue che il polo O non è punto asintotico per la curva. Più precisamente, la curva “parte” dal predetto punto, e ad ogni incremento di 2π dell'anomalia φ , il punto $P(r, \varphi)$ compie un giro completo attorno all'origine, mentre il raggio vettore r risulta incrementato di $2\pi a$. In fig. 1.3 riportiamo l'andamento della spirale di Archimede per $a = 1$.

Una coppia di numeri direttori della retta tangente è

$$\begin{aligned} \lambda(\varphi) &= x'(\varphi) = a \cos \varphi - a\varphi \sin \varphi \\ \mu(\varphi) &= y'(\varphi) = a \sin \varphi + a\varphi \cos \varphi \end{aligned} \quad (1.21)$$

Il seguente vettore è parallelo alla predetta tangente:

$$\mathbf{v}(\varphi) = (a \cos \varphi - a\varphi \sin \varphi) \mathbf{i} + (a \sin \varphi + a\varphi \cos \varphi) \mathbf{j}, \quad \forall \varphi \in [0, +\infty) \quad (1.22)$$


 Figura 1.3: Andamento della spirale di Archimede $r = \varphi$.

A questo punto possiamo determinare l'angolo che il raggio vettore $\mathbf{r}(\varphi)$ forma con il vettore $\mathbf{v}(\varphi)$:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\mathbf{r}(\varphi) \cdot \mathbf{v}(\varphi)}{|\mathbf{r}(\varphi)| |\mathbf{v}(\varphi)|} \\ &= \frac{ar \cos^2 \varphi - ar\varphi \sin \varphi \cos \varphi + ar \sin^2 \varphi + ar\varphi \sin \varphi \cos \varphi}{r (a^2 \cos^2 \varphi - 2a^2\varphi \sin \varphi \cos \varphi + a^2\varphi^2 \sin^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi + 2a^2\varphi \sin \varphi \cos \varphi + a^2\varphi^2 \cos^2 \varphi)} \end{aligned} \quad (1.23)$$

Eseguendo le dovute semplificazioni:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi^2}}$$

Cioè

$$\alpha(\varphi) = \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \varphi^2}} \right) \quad (1.24)$$

Quindi a differenza della spirale logaritmica, l'angolo che la retta tangente forma con il raggio vettore varia punto per punto. Più precisamente, dalla (1.24) segue il comportamento agli estremi di $[0, +\infty)$

$$\alpha(0) = 0, \quad \lim_{\varphi \rightarrow +\infty} \alpha(\varphi) = \frac{\pi}{2} \quad (1.25)$$

Cioè, i vettori \mathbf{r} e \mathbf{v} partono paralleli, riuscendo asintoticamente ortogonali. Ciò è illustrato in fig. 1.4, mentre in fig 1.5 sono tracciate le rette tangenti e i rispettivi raggi vettori per $\varphi = 2$ e $\varphi = 7$ rispettivamente.

1.3 Spirale di Archimede generalizzata

La *spirale di Archimede generalizzata* ha equazione polare:

$$r = a\varphi^{1/n}, \quad \forall \varphi \in [0, +\infty), \quad (1.26)$$

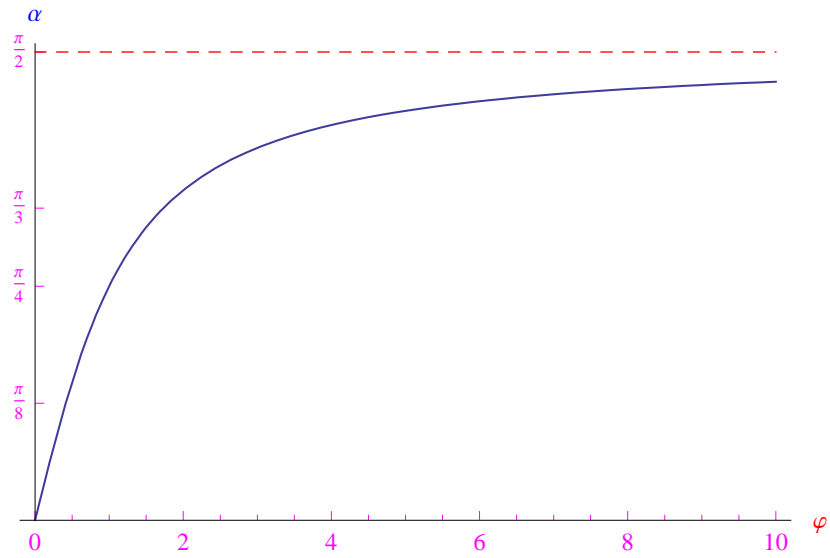


Figura 1.4: Andamento dell'angolo $\alpha(\varphi)$.

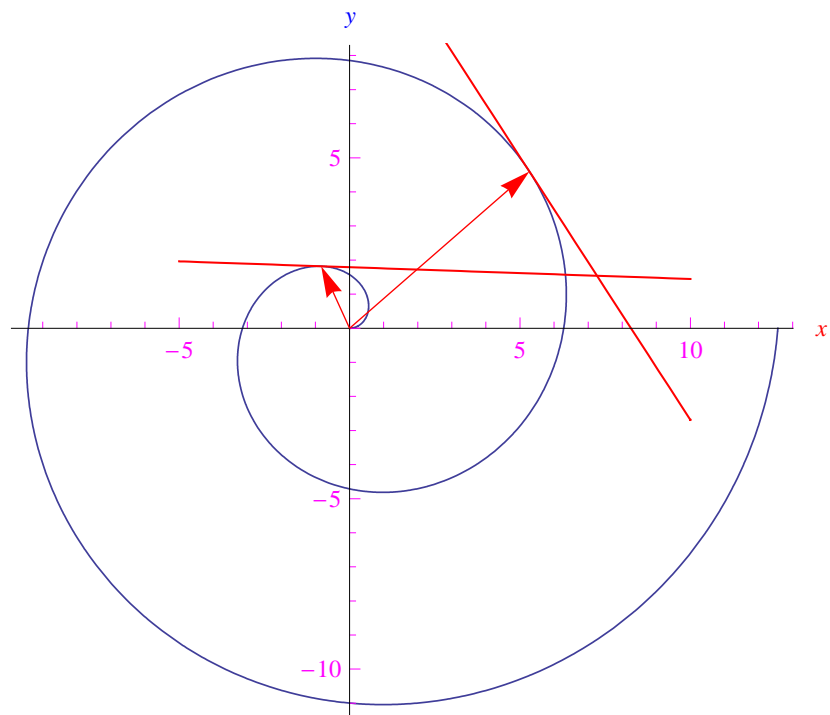


Figura 1.5: Nella spirale di Archimede l'angolo che la retta tangente forma con il raggio vettore varia in funzione dell'anomalia φ , e quindi del punto.

dove $a > 0$ e $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Sostituendo la (1.26) nelle (1.5) otteniamo la seguente rappresentazione parametrica:

$$x(\varphi) = a\varphi^{1/n} \cos \varphi, \quad y(\varphi) = a\varphi^{1/n} \sin \varphi, \quad \varphi \in [0, +\infty) \quad (1.27)$$

Invertendo la $r(\varphi)$ data dalla (1.26), si ha

$$\varphi(r) = \left(\frac{r}{a}\right)^n,$$

per cui

$$\varphi(0) = 0 \quad (1.28)$$

Ne consegue che anche per la spirale di Archimede generalizzata il polo O non è punto asintotico per la curva. In fig. 1.6 riportiamo l'andamento della spirale di Archimede per $a = 1$.

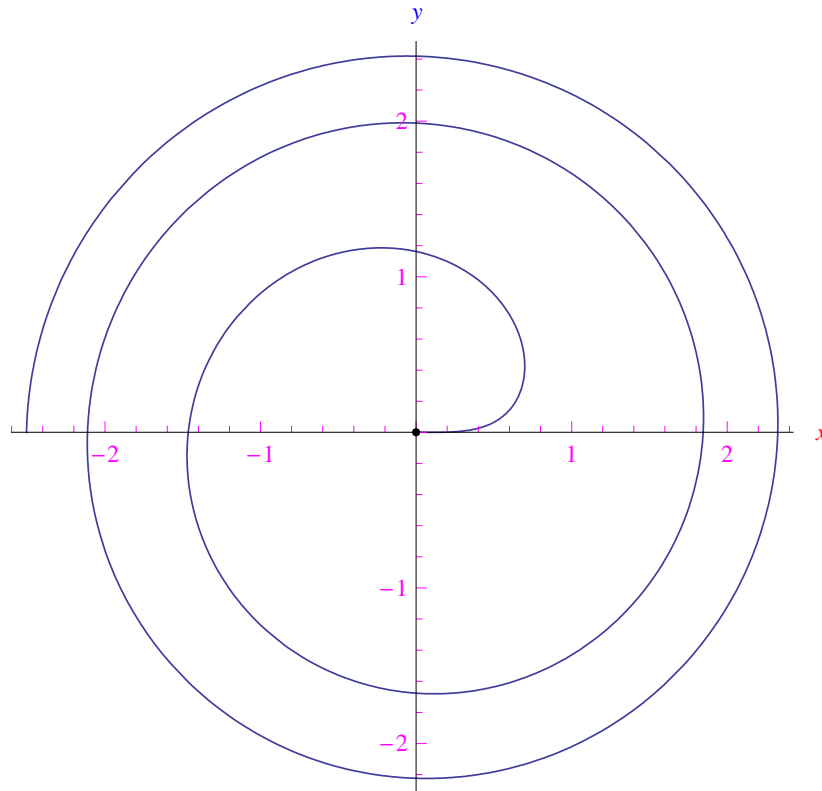


Figura 1.6: Andamento della spirale di Archimede generalizzata $r = \sqrt[3]{\varphi}$.

Una coppia di numeri direttori della retta tangente è

$$\begin{aligned} \lambda(\varphi) = x'(\varphi) &= \frac{a}{n} \varphi^{\frac{1}{n}-1} \cos \varphi - a\varphi^{1/n} \sin \varphi \\ \mu(\varphi) = y'(\varphi) &= \frac{a}{n} \varphi^{\frac{1}{n}-1} \sin \varphi + a\varphi^{1/n} \cos \varphi \end{aligned} \quad (1.29)$$

Il seguente vettore è parallelo alla predetta tangente:

$$\mathbf{v}(\varphi) = \left(\frac{a}{n} \varphi^{\frac{1}{n}-1} \cos \varphi - a\varphi^{1/n} \sin \varphi\right) \mathbf{i} + \left(\frac{a}{n} \varphi^{\frac{1}{n}-1} \sin \varphi + a\varphi^{1/n} \cos \varphi\right) \mathbf{j}, \quad \forall \varphi \in [0, +\infty) \quad (1.30)$$

Determiniamo l'angolo che il raggio vettore $\mathbf{r}(\varphi)$ forma con il vettore $\mathbf{v}(\varphi)$:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{r}(\varphi) \cdot \mathbf{v}(\varphi)}{|\mathbf{r}(\varphi)| |\mathbf{v}(\varphi)|} \quad (1.31)$$

Eseguendo i calcoli:

$$\cos \alpha = \frac{n\varphi^{1-\frac{1}{n}}}{a(1+n^2\varphi^2)}$$

Cioè

$$\alpha(\varphi) = \arccos \left[\frac{n\varphi^{1-\frac{1}{n}}}{a(1+n^2\varphi^2)} \right] \quad (1.32)$$

Risulta:

$$\alpha(0) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}, \quad (1.33)$$

per cui a differenza della spirale di Archimede ($n = 1$) in cui per $\varphi = 0$ il vettore posizione è tangente alla curva, per $n > 1$ tale vettore è normale alla curva. Studiamo l'andamento asintotico:

$$\lim_{\varphi \rightarrow +\infty} \alpha(\varphi) = \arccos \lambda, \quad (1.34)$$

dove

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n}{a} \lim_{\varphi \rightarrow +\infty} \frac{\varphi^{1-\frac{1}{n}}}{1+n^2\varphi^2} = \frac{\infty}{\infty} \quad (1.35)$$

Poniamo $p = 1 - \frac{1}{n}$ onde $p \in (0, 1)$:

$$\lambda = \frac{n}{a} \lim_{\varphi \rightarrow +\infty} \frac{\varphi^{p-2}}{\frac{1}{\varphi^2} + n^2} = \frac{n}{a} \lim_{\varphi \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\varphi^{2-p}}}{\frac{1}{\varphi^2} + n^2} = \frac{n}{a} \cdot \frac{0}{0+n^2} = 0 \implies \lim_{\varphi \rightarrow +\infty} \alpha(\varphi) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

Abbiamo quindi un comportamento simile a quello della semplice spirale archimedeana ($n = 1$). Però eseguendo uno **studio di funzione**, si scopre che $\alpha(\varphi)$ assume un minimo assoluto in

$$\varphi_{\min} = \sqrt{\frac{n-1}{n(n+1)}} \quad (1.36)$$

Il valore ivi assunto da $\alpha(\varphi)$ è :

$$\alpha_{\min} = \arccos \left[\frac{(n-1) \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{n-1}{2n}}}{2n^3} \right] \quad (1.37)$$

L'andamento completo è riportato in fig. 1.7, mentre in fig 1.8 sono tracciate le rette tangenti e i rispettivi raggi vettori per $\varphi = 2$ e $\varphi = 7$ rispettivamente.

1.4 Lemniscata di Bernoulli

La *lemniscata di Bernoulli* ha equazione polare:

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi \quad (1.38)$$

Ne segue che se denotiamo con γ il luogo geometrico del piano la cui equazione in coordinate polari è data dalla (1.38) si ha:

$$\gamma = \gamma_- \cup \gamma_+, \quad (1.39)$$

ove

$$\gamma_{\pm} : r = \pm a \sqrt{\cos 2\varphi}, \quad \forall \varphi \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} X_k, \quad (1.40)$$

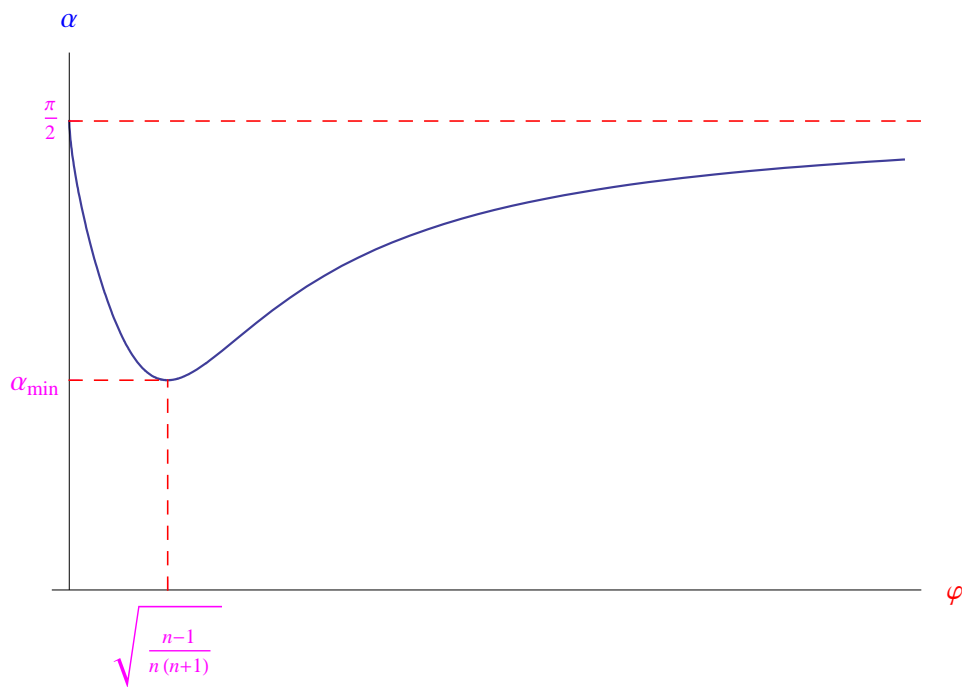


Figura 1.7: Andamento dell'angolo $\alpha(\varphi)$ (cfr. eq. (1.32)).

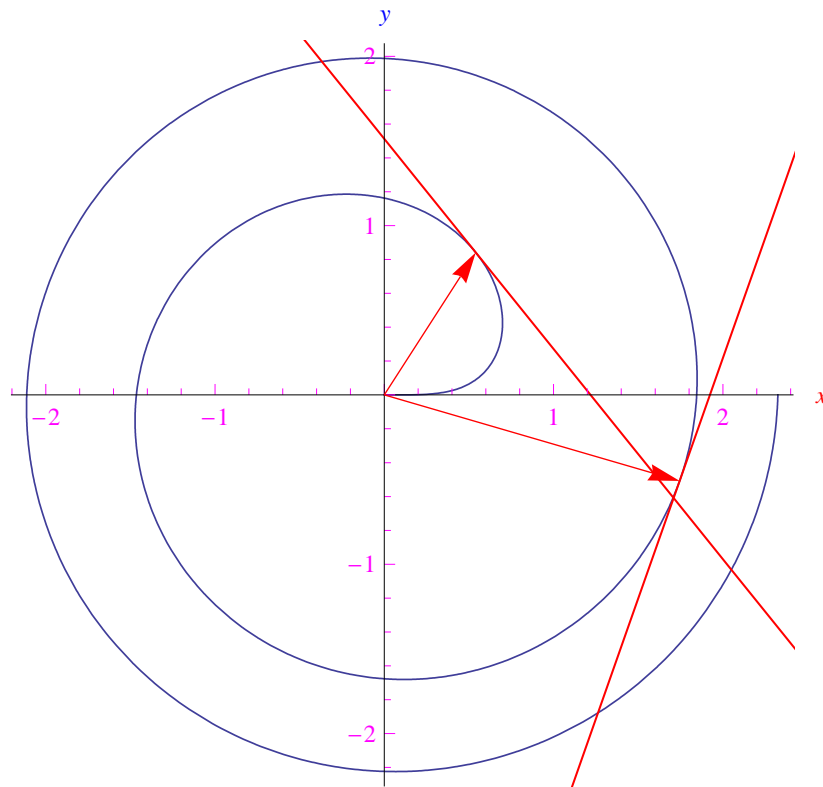


Figura 1.8: Nella spirale di Archimede generalizzata l'angolo che la retta tangente forma con il raggio vettore varia in funzione dell'anomalia φ , e quindi del punto.

essendo

$$X_k = \left[0, \frac{\pi}{4} + k\pi\right] \cup \left[\frac{3}{4}\pi + k\pi, \pi + k\pi\right], \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1.41)$$

Cioè la lemniscata è composta da i due rami γ_- e γ_+ , simmetrici rispetto all'asse polare. Inserendo l'espressione

$$r = \pm a\sqrt{\cos 2\varphi},$$

nelle equazioni che esprimono le coordinate cartesiane in funzione delle coordinate polari, otteniamo la seguente rappresentazione parametrica dei predetti rami:

$$\gamma_{\pm} : x(\varphi) = \pm a\sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi, \quad y(\varphi) = \pm a\sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi, \quad \varphi \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} X_k \quad (1.42)$$

In fig. 1.9 riportiamo l'andamento della lemniscata di Bernoulli.

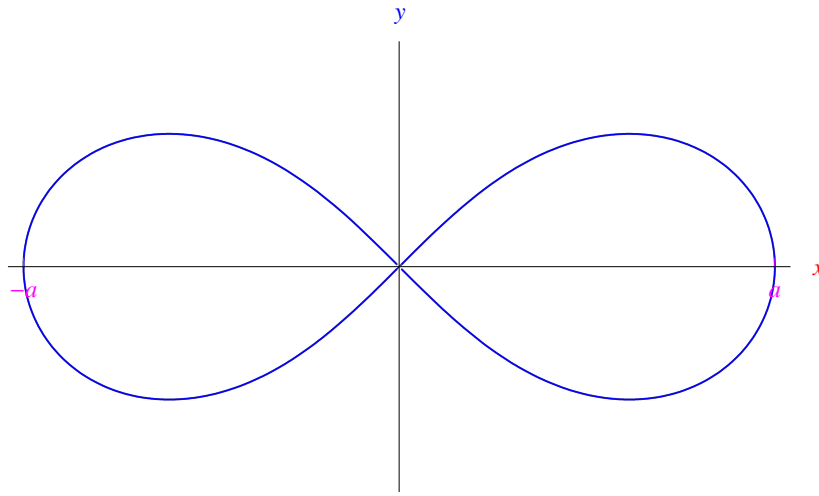


Figura 1.9: La lemniscata di Bernoulli.

1.5 Approssimazione lineare a tratti di una curva piana

Sia data una curva piana γ la cui equazione in coordinate polari (r, φ) è

$$r = r(\varphi), \quad \varphi \in B \subseteq \mathbb{R}, \quad (1.43)$$

essendo $r(\varphi)$ una funzione assegnata e non negativa in B . Rammentiamo le equazioni che legano le coordinate cartesiane (x, y) alle coordinate polari con polo nell'origine del riferimento cartesiano $\mathcal{R}(Oxy)$ e asse polare coincidente con l'asse x :

$$x(r, \varphi) = r \cos \varphi, \quad y(r, \varphi) = r \sin \varphi, \quad (r, \varphi) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R} \quad (1.44)$$

Le (1.44) sono le componenti cartesiane del vettore posizione di un punto del piano di coordinate polari (r, φ) :

$$\mathbf{x}(r, \varphi) = (r \cos \varphi) \mathbf{i} + (r \sin \varphi) \mathbf{j}, \quad (r, \varphi) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R} \quad (1.45)$$

essendo \mathbf{i} e \mathbf{j} i versori degli assi coordinati x, y (cfr. fig. 1.10).

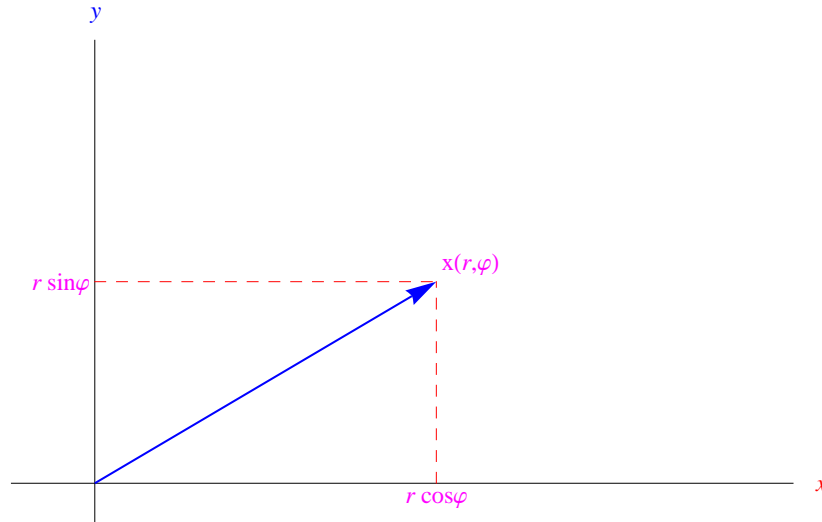


Figura 1.10: Vettore posizione di un punto del piano espresso in funzione delle coordinate polari (r, φ) .

Sostituendo la (1.43) nella (1.45) otteniamo il vettore posizione di un punto variabile sulla curva γ :

$$\boldsymbol{\xi}(\varphi) = \mathbf{x}[r(\varphi), \varphi] = [r(\varphi) \cos \varphi] \mathbf{i} + [r(\varphi) \sin \varphi] \mathbf{j}, \quad \varphi \in B \quad (1.46)$$

Costruiamo una spezzata σ_γ di vertici $V_0, V_1, \dots, V_N \in \gamma$. Senza perdita di generalità, supponiamo che γ passi per l'origine, e poniamo $V_0 (x = 0, y = 0)$. I rimananti vertici sono:

$$V_k(r(\varphi_k), \varphi_k), \quad \text{con } \varphi_k = kd, \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (1.47)$$

Ciò implica che il k -esimo lato di σ_γ forma un angolo kd con l'asse x . Consideriamo il caso particolare di una rosa a 4 foglie:

$$r = a \sin(2\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad (1.48)$$

Per $d = 1$, $N = 10$ otteniamo il grafico di fig. 1.11. Per $N = 300$ otteniamo il grafico di fig. 1.12

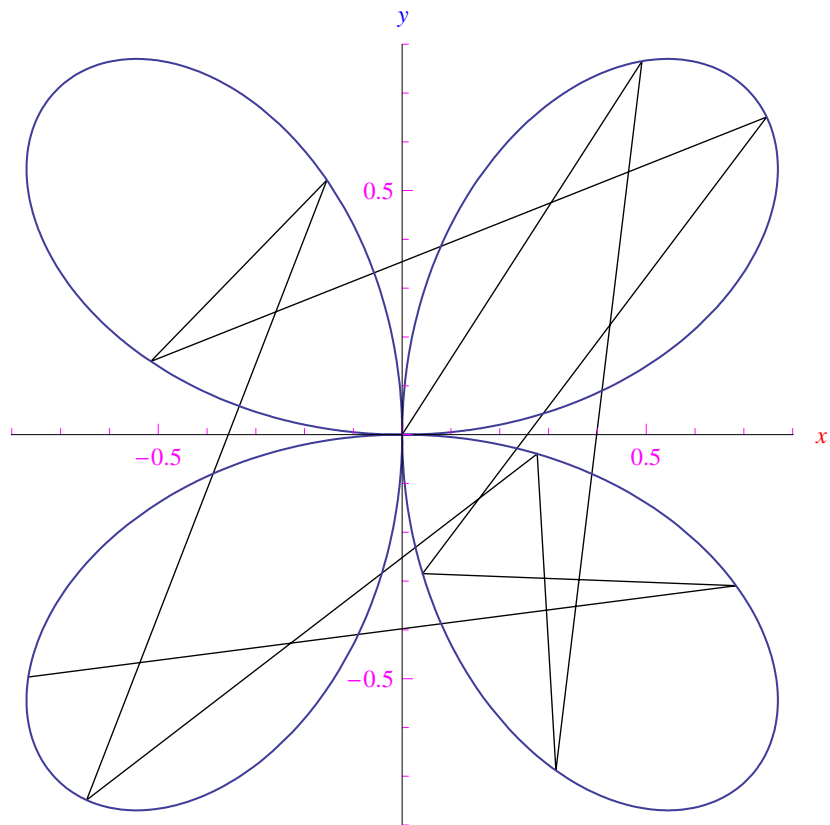


Figura 1.11: Approssimazione lineare a tratti di una rosa a 4 foglie, attraverso una spezzata di $N = 10$ vertici.

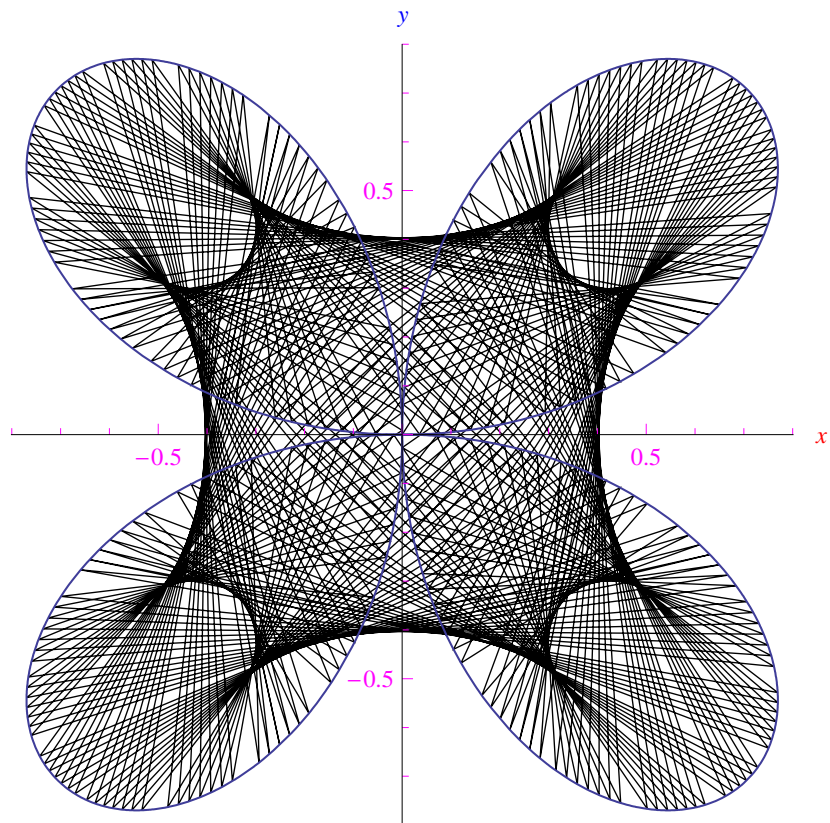


Figura 1.12: Approssimazione lineare a tratti di una rosa a 4 foglie, attraverso una spezzata di $N = 300$ vertici.