Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_{\Gamma} (X\,dx + Y\,dy + Z dz)$$

Marcello Colozzo

Sommario

In Analisi Matematica - nello studio dei limiti di una funzione reale di una variabile reale - vengono dimostrati alcuni *criteri di regolarità per confronto*. Si pensi, ad esempio, al noto Teorema dei carabinieri. In questa Monografia presentiamo due criteri di regolarità *per restrizione*. Tali criteri stabiliscono delle condizioni di regolarità di una funzione f in un punto di accumulazione x_0 del proprio insieme di defnizione X, studiando il comportamento della restrizione di f a un qualunque sottoinsieme non vuoto di X e avente x_0 come punto di accumulazione. Si tratta, dunque, di criteri la cui origine è per così dire, topologica. Più precisamente, il primo criterio caratterizza *globalmente* la regolarità di f in x_0, nel senso che vanno determinati tutti e soli i sottoinsiemi dell'insieme di definizione di f in cui la funzione medesima è regolare in x_0, il secondo criterio, invece, caratterizza *localmente* la regolarità di f, poichè basta trovare un intorno di x_0 di ampiezza comunque piccola, in cui f è regolare in x_0.

Keywords: analisi matematica;limite di una funzione

Indicando con $\mathcal{D}(X)$ l'insieme derivato di $X \subseteq \mathbb{R}$ (i.e. l'insieme dei punti di accumulazione per X), consideriamo la funzione $f : X \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathcal{D}(X)$. Se $X' \subset X \mid x_0 \in \mathcal{D}(X')$:

Definizione 1 *Detta $f_{X'}$ la restrizione di f a X', il limite (se esiste)*

$$\lim_{x \to x_0} f_{X'}(x),$$

*si chiama **limite di f per $x \to x_0$ su X'** e si indica con il simblo:*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x)$$

Sussiste il seguente criterio, di cui omettiamo la dimostrazione:

Criterio 2 ***Hp**. f è regolare in $x_0 \in \mathcal{D}(X)$, cioè*

$$\exists l \in \bar{\mathbb{R}} \mid \lim_{x \to x_0} f(x) = l,$$

dove $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ è l'insieme ampliato dei numeri reali.

***Th**. $\forall X' \subset X \mid X' \neq \emptyset,\ x_0 \in \mathcal{D}(X'),\ \ f_{X'}$ è regolare in x_0 e risulta:*

$$\lim_{x \to x_0} f_{X'}(x) = l$$

Nel formalismo dei connettivi logici, la proposizione precedente si scrive:

$$\left.\exists l \in \bar{\mathbb{R}} \mid \lim_{x \to x_0} f(x) = l\right) \Longrightarrow \left(\lim_{x \to x_0} f_{X'}(x) = l,\ \ \forall X' \subset X \mid X' \neq \emptyset,\ x_0 \in \mathcal{D}(X')\right. \quad (1)$$

La (1) è invertibile:

$$\left.\exists l \in \bar{\mathbb{R}} \mid \lim_{x \to x_0} f_{X'}(x) = l,\ \ \forall X' \subset X \mid X' \neq \emptyset,\ x_0 \in \mathcal{D}(X')\right) \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad (2)$$

Osservazione 3 *Nella (2) è implicita l'implicazione seguente:*

$$\forall X' \subset X \mid x_0 \in \mathcal{D}(X') \Longrightarrow x_0 \in \mathcal{D}(X)$$

Le (1)-(2) si unificano nel seguente criterio che esprime una condizione necessaria e sufficiente affinchè f sia regolare in x_0:

Criterio 4 ***(Primo criterio di regolarità per restrizione)***

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ è regolare} \\ \text{in } x_0 \in \mathcal{D}(X) \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\, f_{X'} \text{ è regolare in } x_0,\ \ \forall X' \subset X \mid X' \neq \emptyset,\, x_0 \in \mathcal{D}(X')\right.$$

Cioè, condizione necessaria e sufficiente affinchè f sia regolare in $x_0 \in \mathcal{D}(X)$ è che sia regolare la restrizione a *ogni* sottoinsieme non vuoto di X' che ammette x_0 come punto di accumulazione.

Tale criterio richiede la regolarità di $f_{X'}$ in x_0 per ogni $X' \subset X$ e *non per un solo sottoinsieme di* X'. In altri termini, la regolarità di $f_{X'}$ solo per alcuni sottoinsiemi X' (tali che $x_0 \in \mathcal{D}(X')$) non garantisce la regolarità di f in x_0:

$$\exists X' \subset X \mid f_{X'} \text{ è regolare in } x_0) \not\Rightarrow f \text{ è regolare in } x_0$$

La regolarità in uno o più sottoinsiemi di X è una condizione necessaria ma non sufficiente per la regolarità di f in x_0. Ad esempio, la funzione $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ è definita in $X = \mathbb{R} \diagdown \{0\}$ ed è non regolare in $x_0 = 0$. Ora, consideriamo la sua restrizione all'insieme:

$$X' = \{x_k \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset X, \quad \text{con } x_k = \frac{2}{\pi(1+4k)}$$

Il punto $x_0 = 0$ è manifestamente punto di accumulazione[1] per X' e la funzione f è ivi regolare. Infatti $\forall x \in X',\ f_{X'}(x) = 1$, onde:

$$\lim_{x \to 0} f_{X'}(x) = 1,$$

mentre $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$. A tale conclusione fanno eccezione le restrizioni di f agli intorni di $x_0 = 0$. Infatti, per un intorno $I_\delta(x_0 = 0) = (-\delta, \delta)$ con $\delta > 0$ preso ad arbitrio, si ha:

$$f_{X \cap I_\delta(0)}(x) = \sin \frac{1}{x},$$

per cui $\nexists \lim_{x \to 0} f_{X \cap I_\delta(0)}(x)$. Quindi:

Proposizione 5 ***Hp***. *$\exists I(x_0) \mid f_{X \cap I(x_0)}$ è regolare in $x_0 \in \mathcal{D}(X)$. Cioè:*

$$\exists l \in \bar{\mathbb{R}} \mid \lim_{x \to x_0} f_{X \cap I(x_0)}(x) = l$$

Th. *f è regolare in x_0, e risulta:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

[1] Risulta $x_0 \notin X'$ e

$$x_0 = \lim_{|k| \to +\infty} x_k$$

Cioè la successione $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ è infinitesima per $|k| \to +\infty$. Applicando la definizione di limite di una successione:

$$\forall I_\varepsilon(x_0),\ \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid k > \nu_\varepsilon \Longrightarrow x_k \in I_\varepsilon(x_0),$$

cosicchè $\forall \varepsilon > 0,\ X' \cap I_\varepsilon(x_0) \neq \emptyset \Longrightarrow x_0 \in \mathcal{D}(X')$.

La proposizione 5 è invertibile:

Proposizione 6 ***Hp.*** *f è regolare in $x_0 \in \mathcal{D}(X)$. Cioè:*

$$\exists l \in \bar{\mathbb{R}} \mid \lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Th. *$\exists I(x_0) \mid f_{X \cap I(x_0)}$ è regolare in $x_0 \in \mathcal{D}(X)$, risultando:*

$$\lim_{x \to x_0} f_{X \cap I(x_0)}(x) = l$$

Le proposizioni 5-6 si unificano nel criterio:

Criterio 7 *(Secondo Criterio di regolarità per restrizione)*

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ è regolare} \\ \text{in } x_0 \in \mathcal{D}(X) \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\exists I(x_0) \mid f_{X \cap I(x_0)} \text{ è regolare in } x_0\right.$$

Cioè, condizione necessaria e sufficiente affinchè f sia regolare in $x_0 \in \mathcal{D}(X)$, è l'esistenza di un intorno $I(x_0)$ del punto x_0 tale che $f_{X \cap I(x_0)}$ sia ivi regolare.

Concludiamo osservando che mentre il criterio 4 caratterizza *globalmente* la regolarità di f in x_0, nel senso che vanno determinati tutti e soli i sottoinsiemi dell'insieme di definizione di f in cui la funzione medesima è regolare in x_0, il criterio 7 caratterizza *localmente* la regolarità di f, poichè basta trovare un intorno di x_0 di ampiezza comunque piccola, in cui f è regolare in x_0.

Riferimenti bibliografici

[1] Fiorenza R. Greco D., 1980. *Lezioni di analisi matematica*, Liguori Editore.

[2] Gizzetti A., 1965. *Lezioni di analisi matematica, vol I*, Veschi Editore.