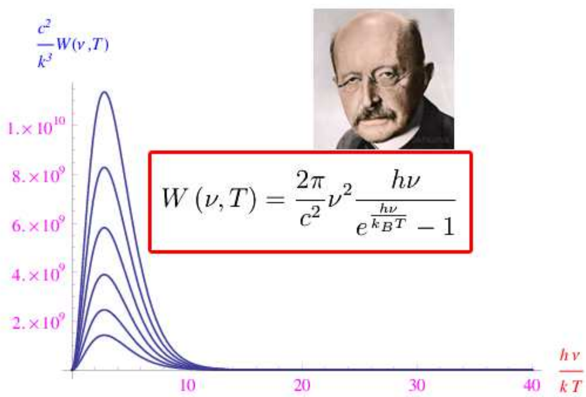
Matematica Open Source – http://www.extrabyte.info
Quaderni di Fisica – 2021

Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f\left(x\right) \quad \sum_{k=0}^{+\infty}a_k \quad \int f\left(x\right)dx \quad \oint_{\Gamma}\left(Xdx+Ydy+Zdz\right)$$

Il quanto d’azione

Marcello Colozzo



Indice

1 Caratteristiche sperimentali

1.1 Legge di Stefan-Boltzmann. Legge di Wien. Legge dello spostamento

Un corpo $\mathcal{C}$ (solido o liquido) in equilibrio termodinamico alla temperatura T, emette radiazione elettromagnetica (irraggiamento) che per T non eccessivamente alta è nella banda dell'infrarosso. Sia $\mathcal{C}$ matematizzabile attraverso un dominio dello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$. L'energia emessa dall'elemento di superficie $d\sigma$ nel cono di angolo solido $d\Omega$ (fig.1) il cui asse forma un angolo θ con il versore $\mathbf{n}$ della normale esterna a $\partial\mathcal{C}$, nell'unità di tempo e nell'intervallo di frequenze $[\nu, \nu + d\nu]$, può essere scritta come:

$$e(\nu, T) = \cos\theta d\nu d\Omega d\sigma \tag{1}$$

dove la grandezza non negativa $e(\nu, T)$ è il **potere emissivo** di $\mathcal{C}$.

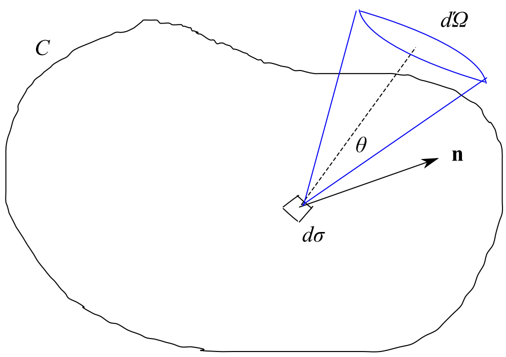


Figura 1: Energia emessa dall'elemento di superficie $d\sigma$ di angolo sollido $d\Omega$.

Se invece irradiamo il corpo, parte dell'energia incidente viene assorbita, e parte viene riflessa. Definiamo allora il **potere assorbitivo** :

$$a(\nu, T) = \frac{\text{energia assorbita}}{\text{energia incidente}} \leq 1, \quad \forall \nu, T$$

Qui intendiamo "energia assorbita" relativamente all'intervallo di frequenze $[\nu, \nu + d\nu]$, per cui si tratta di una densità spettrale di energia.

Definizione 1 *$\mathcal{C}$ è un* **corpo nero** *se*

$$a(\nu, T) = 1, \quad \forall \nu, T \tag{2}$$

Ciò premesso, consideriamo una cavità le lcui pareti sono in equilibrio alla temperatura T. Per quanto precede, le pareti emettono energia elettromagnetica; trattandoosi di una cavità, tale energia non può "uscire" per cui viene riassorbita dalle pareti, fino al raggiungimento di uno stato di equilibrio (emissione=assorbimento). Attraverso considerazioni termodinamiche si può dimostrare che in tali condizioni la densità spettrale di energia è una funzione universale $u(\nu, T)$, nel senso che non dipende dal punto in cui si determina il campo elettromagnetico né dalla direzione di propagazione del campo medesimo. In altri termini, all'equilibrio il campo all'interno della cavità è omogeneo ed isotropo. Fissiamo, ora, la nostra attenzione alle pareti della cavità (fig. 2).

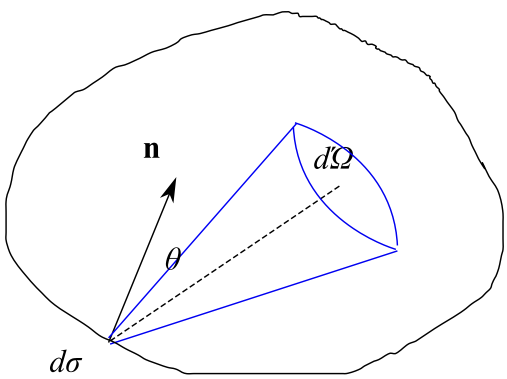


Figura 2: Cavità.

Preso ad arbitrio l'elemento di superficie $d\sigma$ della parete della cavità, denotiamo con $\mathbf{n}$ il versore della normale interna. L'energia che si propaga nell'unità di tempo nel cono di angolo solido $d\Omega$ e di frequenza in $[\nu, \nu + d\nu]$ è

$$\frac{c}{4\pi} u(\nu, T)\, d\Omega d\nu \tag{3}$$

dove c è la velocità della luce. Parte di tale energia viene assorbita dal predetto elemento di superficie. Precisamente:

$$a(\nu, T) \frac{c}{4\pi} u(\nu, T)\, d\Omega d\nu d\sigma \cos\theta \tag{4}$$

D'altra pare, l'energia emessa da $d\sigma$ nell'unità di tempo e nello stesso $d\nu$ è

$$e(\nu, T)\, d\Omega d\nu d\sigma \cos\theta \tag{5}$$

All'equilibrio

$$a(\nu, T) \frac{c}{4\pi} u(v, T)\, d\Omega d\nu d\sigma \cos\theta = e(\nu, T)\, d\Omega d\nu d\sigma \cos\theta$$

onde

$$\frac{e(\nu, T)}{a(\nu, T)} = \frac{c}{4\pi} u(\nu, T) \tag{6}$$

Nel caso particolare di un corpo nero:

$$e(\nu, T) = \frac{c}{4\pi} u(\nu, T) \tag{7}$$

Ne segue che la densità spettrale di energia all'interno di una cavità le cui pareti siano mantenute alla temperatura T, è a meno di unua costante moltiplicativa, il potere emissivo del corpo nero. In altri termini, se riusciamo a determinare il potere emissivo del corpo nero, veniamo a conoscenza della funzione universale $u(\nu, T)$. A tale scopo utilizziamo una cavità (forno) le cui pareti possono essere portate a una temperatura T. Le pareti presentano poi un foro di dimensioni trascurabili rispetto alle dimensioni lineari delle pareti (in modo da non perturbare lo stato di equilibrio). In tali condizioni, la cavità è un corpo nero giacché la radiazione entrante rimane "intrappolata" grazie alle dimensioni infinitesime del foro. In corrispondenza di quest'ultimo fissiamo un sistema di assi cartesiani $Oxyz$ con origine nel foro e asse z orientato secondo la normal esterna alla superficie della cavità (fig. 3).

Prendiamo un cono di vertice in O e semiapertura infinitesima tale da individuare l'angolo solido elementare $d\Omega$, il cui asse forma un angolo θ con il versore $\mathbf{n}$ che per quanto detto,

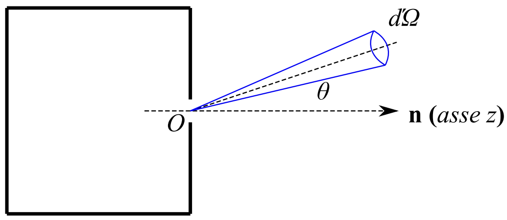


Figura 3: Schema del corpo nero. La forma della cavità è ininfluente.

è il versore dell'asse z. Orientiamo l'asse x del predetto sistema di assi in modo che θ sia la colatitudine di un riferimento polare con polo in O e asse polare coincidente con l'asse z. Con questa disposizione degli assi, $d\Omega$ è l'elemento di superficie della sfera di centro O e raggio unitario, cioè

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$$

Ricordiamo che il potere emissivo $e(\nu, T)$ è l'energia emessa in $d\Omega$ nell'unità di tempo e nell'intervallo $d\nu$ di frequenze. Quindi

$$e(\nu, T)\cos\theta d\nu d\Omega d\sigma = e(\nu, T)\sin\theta\cos\theta d\nu d\sigma d\theta d\varphi, \tag{8}$$

essendo $d\sigma$ l'elemento di superficie relativo al foro. Per avere l'energia emessa dal foro (nell'unità di tempo e nell'intervallo di frequenze $d\nu$) dobbiamo integrare la (8) per $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Se ci riferiamo all'unità di superficie:

$$\begin{aligned} W(\nu, T) &= \int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta\cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi e(\nu, T) \\ &= 2\pi e(\nu, T)\int_0^{\pi/2} \sin\theta d(\sin\theta) = 2\pi e(\nu, T)\cdot\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\pi/2} \end{aligned}$$

Cioè

$$W(\nu, T) = \pi e(\nu, T) \tag{9}$$

che è l'energia nell'unità di tempo (potenza) e per intervallo unitario di frequenze e per unità di superficie. Tale grandezza è dunque, la densità di potenza spettrale emessa da un corpo nero in equilibrio alla temperatura T. Per avere la potenza emessa dall'unità di superficie, dobbiamo integrare su tutte le frequenze:

$$\int_0^{+\infty} W(\nu, T) d\nu$$

che è un integrale generalizzato. Si ha $W(\nu, T) > 0$, per cui tale funzione è senz'altro integrabile. Fisicamente, deve essere sommabile:

$$\int_0^{+\infty} W(\nu, T) d\nu < +\infty$$

Sperimentalmente (**Legge di Stefan – Boltzmann**):

$$\int_0^{+\infty} W(\nu, T) d\nu = \sigma T^4 \tag{10}$$

dove $\sigma = 5.68 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{erg}\cdot\mathrm{cm}^{-2}\,\mathrm{s}^{-2}$. Cioè la potenza emessa dall'unità di superficie di un corpo nero, è proporzionale alla quarta potenza della temperatura di equilibrio.

Sperimentalmente, si era poi visto (**Legge dello spostamento**):

$$\lambda_{\max} T = \text{costante} \tag{11}$$

dove $\lambda_{\max}$ è il punto di massimo assoluto della funzione $W(\lambda, T)$, essendo $\lambda = \frac{c}{\nu}$ la lunghezza d'onda. La (11) è un caso particolare della **Legge di Wien** (1893), espressa dalla

$$W(\nu, T) = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) \tag{12}$$

essendo $F(x)$ una funzione ignota. Infatti:

$$\int_0^{+\infty} W(\nu, T)\, d\nu = \int_0^{+\infty} \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu \underset{x=\frac{\nu}{T}}{=} T^4 \int_0^{+\infty} x^3 F(x)\, dx$$

Per una $F(x)$ tale che $x^3 F(x)$ è sommabile in $[0, +\infty)$

$$\int_0^{+\infty} W(\nu, T)\, d\nu = \sigma T^4, \quad \sigma = \int_0^{+\infty} x^3 F(x)\, dx$$

La (12) pur essendo matematicamente accettabile, non lo è fisicamente giacché l'argomento della funzione F è costituito dal rapporto di grandezze non omogenee, per cui ridefiniamo

$$f\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)$$

dove k_B è la costante di Boltzmann, mentre $h > 0$ è una nuova costante con le dimensioni di un'azione (energia×tempo). Inoltre, per garantire l'invarianza rispetto a un cambiamento delle unità di misura, dobbiamo inserire una nuova costante universale, oltre alla costante di Boltzmann. Siccome $u(\nu, T)$ è una funzione universale, l'unica costante universale disponibile nell'ambito classico è la velocità della luce c. Quindi

$$u(\nu, T) = \frac{\nu^2}{c^3} k_B T f\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)$$

da cui

$$W(\nu, T) = \frac{\nu^2}{4c^2} k_B T f\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) \tag{13}$$

2 Impostazione teorica

2.1 La formula di Rayleigh-Jeans

La cavità che realizza il corpo nero è sede di un campo elettromagnetico di densità spettrale $u(\nu, T)$. Dalla Meccanica statistica [1] sappiamo che tale campo equivale a un sistema di oscillatori armonici disaccoppiati, di massa unitaria, le cui frequenze riproducono lo spettro delle frequenze caratteristiche della cavità. L'energia meccanica di singolo oscillatore è

$$E(\nu, T) = \frac{p^2}{2} + 2\pi^2 \nu^2 q^2, \tag{14}$$

essendo (q,p) le variabili canoniche nel formalismo hamiltoniano, i.e. posizione ed impulso. Per il teorema dell'equipartizione dell'energia, l'energia media è

$$\bar{E}(\nu,T)=\frac{\overline{p^2}}{2}+\overline{2\pi^2\nu^2q^2}=\frac{1}{2}k_BT+\frac{1}{2}k_BT=k_BT \tag{15}$$

Il numero di oscillatori di frequenza in $[\nu,\nu+d\nu]$ è [1]:

$$dN=\frac{8\pi}{c^3}V\nu^2d\nu \tag{16}$$

dove V è il volume della cavità. Quindi

$$u(\nu,T)\,d\nu=\frac{dN}{V}\bar{E}(\nu,T)=\frac{8\pi}{c^3}\nu^2d\nu k_BT$$

da cui

$$W(\nu,T)=\frac{8\pi}{c^3}k_BT\nu^2 \tag{17}$$

che è **la formula di Rayleigh-Jeans**. Confrontando con la (13):

$$f(x)=8\pi,$$

che è manifestamente non sommabile in $[0,+\infty)$. Ne concludiamo che la predetta formula non è accettabile, anche se riproduce fedelmente i dati sperimentali nel limite $\nu\ll 1$.

2.2 Ipotesi di Planck

Riprendiamo la relazione

$$u(\nu,T)\,d\nu=\frac{dN}{V}\bar{E}(\nu,T)$$

che è corretta. Ciò che invece non lo è, è il risultato:

$$\bar{E}(\nu,T)=k_BT$$

derivante dal teorema di equipartizione dell'energia e quindi, dalla legge di distribuzione di Boltzmann. Rivediamo quest'ultima, scrivendo l'energia di singolo oscillatore nella forma:

$$E(q,p;\nu)=\frac{p^2}{2}+2\pi\nu^2q^2 \tag{18}$$

Il sistema di oscillatori è in equilibrio alla temperatura T, e come tale segue la statistica di Boltzmann secondo cui la probabilità infinitesima che il punto rappresentativo (p,q) dell'oscillatore di energia (18) si trovi nelll'elemento di «volume» $dqdp$ dello spazio delle fasi Γ, è

$$Ae^{-\frac{E(q,p;\nu)}{k_BT}} \tag{19}$$

dove

$$A=\int_\Gamma dqdpe^{-\frac{E(q,p;\nu)}{k_BT}} \tag{20}$$

Passiamo dalle variabili canoniche (p,q) alle variabili (ξ,η)

$$\xi=\sqrt{2}\pi\nu q,\quad \eta=\frac{1}{\sqrt{2}}p \tag{21}$$

onde

$$E(\xi,\eta)=\xi^2+\eta^2 \tag{22}$$

Nel piano $\xi\eta$ passiamo alle coordinate polari

$$\xi=r\cos\varphi,\quad \eta=r\sin\varphi \tag{23}$$

Segue

$$\pi\nu dqdp=d\xi d\eta=rdrd\varphi \tag{24}$$

Dalla (22)

$$dE=2\xi d\xi+2\eta d\eta \tag{25}$$

Differenziando la (23):

$$dE=2rdr$$

Quindi la (24) diviene

$$\pi\nu dqdp=\frac{1}{2}dEd\varphi$$

che ci consente di eseguire un cambio di variabile in (19). Precisamente:

$$Ae^{-\frac{E(q,p;\nu)}{k_BT}}=\frac{A}{\pi\nu}\frac{1}{2}e^{-\frac{E}{k_BT}}dEd\varphi;\quad A=\int_0^{+\infty}dE\int_0^{2\pi}d\varphi\frac{1}{2\pi\nu}e^{-\frac{E}{k_BT}}=\frac{1}{\nu}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{E}{k_BT}}dE$$

da cui la probabilità che l'oscillatore di frequenza ν abbia energia in $[E,E+dE]$

$$\frac{A}{2\pi\nu}e^{-\frac{E}{k_BT}}dE\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{A}{\nu}e^{-\frac{E}{k_BT}}dE$$

Sostituendo il valore di A

$$\frac{e^{-\frac{E}{k_BT}}dE}{\int_0^{+\infty}e^{-\frac{E}{k_BT}}dE} \tag{26}$$

che è indipendente dalla frequenza. L'energia media è

$$\bar{E}=\frac{\int_0^{+\infty}Ee^{-\frac{E}{k_BT}}dE}{\int_0^{+\infty}e^{-\frac{E}{k_BT}}dE}\underset{\beta=\frac{1}{k_BT}}{=}-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\int_0^{+\infty}e^{-\frac{E}{k_BT}}dE=-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\beta^{-1}=\frac{1}{\beta},$$

cioè

$$\bar{E}=k_BT,$$

come volevamo dimostrare. Cosa fece Planck? Riscriviamo la (26)

$$\frac{e^{-\frac{E}{k_BT}}dE}{\int_0^{+\infty}e^{-\frac{E}{k_BT}}dE}$$

Qui E varia con continuità tra 0 e $+\infty$. Planck, invece, ipotizzò $E_n=n\varepsilon$ con $n=0,1,2,...$, e $\varepsilon>0$ quantità assegnata (per ora ignota). Cioè l'energia di singolo oscillatore è *quantizzata*. Con tale artificio matematico la distribuzione di Boltzmann è

$$\frac{e^{-\frac{n\varepsilon}{k_BT}}}{\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-\frac{n\varepsilon}{k_BT}}} \tag{27}$$

Quindi l'energia media

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} n\varepsilon e^{-\frac{n\varepsilon}{k_B T}}}{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{n\varepsilon}{k_B T}}} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n\varepsilon\beta} \tag{28}$$

L'argomento del logaritmo è una serie geometrica:

$$x = e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}} < 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{n\varepsilon}{k_B T}} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}}}$$

Ne segue

$$\bar{E} = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{k_B T}} - 1}$$

Planck pose $\varepsilon = h\nu$, dove h è la costante che avevamo introdotta nel numero precedente. Quindi

$$u(\nu, T)\, d\nu = \frac{dN}{V}\bar{E} = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 d\nu \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

Tenendo conto che $W = \frac{c}{4}u$, otteniamo finalmente la **la formula di Planck**

$$W(\nu, T) = \frac{2\pi}{c^2}\nu^2 \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \tag{29}$$

Per $h\nu \ll k_B T$ possiamo sviluppare in serie di Taylor l'esponenziale, arrestando lo sviluppo al primo ordine:

$$W(\nu, T) = \frac{2\pi}{c^2}\nu^2 k_B T,$$

cioè la legge di Raylaigh-Jeans. Si noti che in tale limite sparisce la costante h. Quest'ultima è la **costante di Planck**.

$$h \simeq 6.266 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{erg\,s} \tag{30}$$

La (29) riproduce il giusto comportamento asintotico per $\nu \to +\infty$. In fig. 4 riportiamo l'andamento di W in funzione della frequenza, per differenti valori di T, ottenendo una famiglia di *planckiane*.

L'interpretazione fisica del risultato di Planck è la seguente: i processi di emissione/assorbimento di radiazione, sono costituiti da una successione di atti elementari caratterizzati dalla medesima energia quantità di energia $\varepsilon = h\nu$.

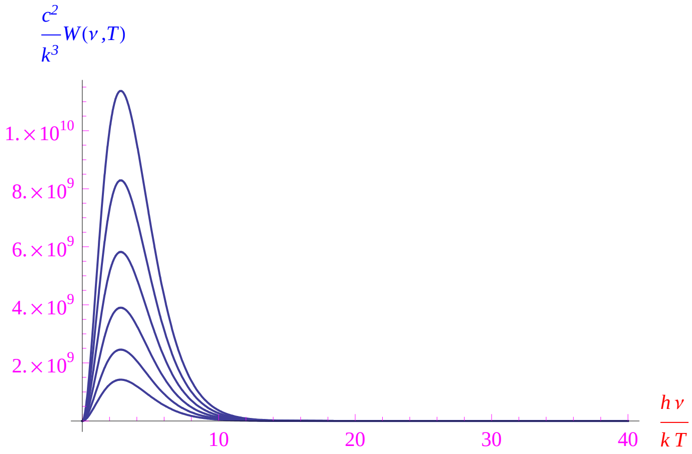


Figura 4: Andamento di una famiglia di planckiane.

Riferimenti bibliografici

[1] Caldirola P. Prosperi G., Cirelli R. *Introduzione alla fisica teorica* UTET.