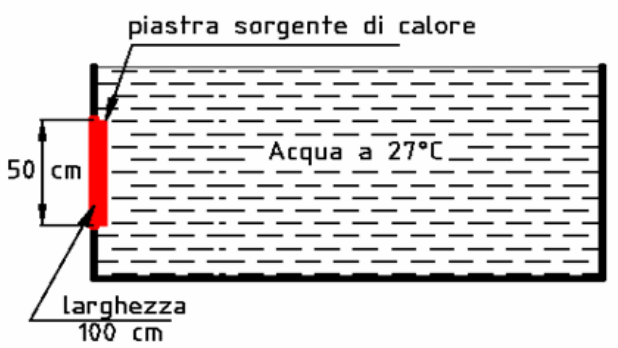
Matematica Open Source – http://www.extrabyte.info
Quaderni di Fisica Tecnica – 2022

Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_{\Gamma} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

Convezione naturale

Ing. Giorgio Bertucelli



Indice

1 Introduzione 2

2 Esercizi svolti 5

Bibliografia 16

1 Introduzione

Riassumeremo il tema **Convezione naturale** partendo dalle equazioni di Navier per i fluidi incompressibili [1].

In uno spazio S, definito da una terna cartesiana, si supponga di avere un fluido incompressibile in moto, la cui densità ρ e viscosità dinamica η siano costanti. Nello spazio S agiscono forze di massa che ammettono un potenziale. Una particella infinitesima di volume dV, di massa $dm = \rho dV$, potrà essere sottoposta ad una forza $\mathbf{F}dm$ dove F (forza per unità di massa) si misura in N / kg. Se F ammette un potenziale Ψ allora è

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad}\Psi \tag{1}$$

Oltre alla predetta forza, sulla particella agiscono forze trasmesse attraverso la superficie che la limita dal fluido circostante. La risultante di tale forze sia $\mathbf{X}dV$ somma di forze di pressione e di viscosità:

$$X = -\operatorname{grad} p + \eta\left(\nabla^2 u_x\mathbf{i} + \nabla^2 u_y\mathbf{j} + \nabla^2 u_z\mathbf{k}\right) \tag{2}$$

dove p è la pressione e u la velocità. Ricordiamo l'espressione dell'operatore di Laplace (o semplicemente laplaciano):

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Longrightarrow \nabla^2 u_x = \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \tag{3}$$

La forza risultante sulla particella è

$$\mathbf{a}dm = -\operatorname{grad}\Psi - \operatorname{grad} pdV + \eta\left(\nabla^2 u_x\mathbf{i} + \nabla^2 u_y\mathbf{j} + \nabla^2 u_z\mathbf{k}\right)dV \tag{4}$$

Poiché $dm = \rho dV$ si ottiene

$$\rho\mathbf{a} = -\rho\operatorname{grad}\Psi\operatorname{grad} p + \eta\left(\nabla^2 u_x\mathbf{i} + \nabla^2 u_y\mathbf{j} + \nabla^2 u_z\mathbf{k}\right)$$

che è l'**equazione del moto dei fluidi viscosi incompressibili** cui corrispondono le tre equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} \rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial(p+\rho\Psi)}{\partial x} + \eta\nabla^2 u_x \\ \rho\left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial(p+\rho\Psi)}{\partial y} + \eta\nabla^2 u_y \\ \rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial(p+\rho\Psi)}{\partial z} + \eta\nabla^2 u_z \end{cases} \tag{5}$$

dove al primo membro le espressioni tra parentesi sono le componenti dell'accelerazione sugli assi cartesiani. A questo sistema di equazioni si aggiunge l'**equazione di continuità**:

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{6}$$

Alle (5)-(6) devono essere aggiunte le *equazioni al contorno* ed eventualmente le *equazioni iniziali* se il moto del fluido non è in regime stazionario.

Ciò posto, scriviamo le suddette equazioni in forma opportuna per iniziare lo studio della convezione naturale. Le forze di massa si riducono alle forze gravitazionali; quindi supposto l'asse z orientato verso l'alto, si ha $\Psi = gz$.

$$\begin{cases} \rho\frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\nabla^2 u_x \\ \rho\frac{\partial u_y}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta\nabla^2 u_y \\ \rho\frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial(p+\rho\Psi)}{\partial z} + \eta\nabla^2 u_z \end{cases} \quad \text{con} \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \tag{7}$$

I moti convettivi sono dovuti esattamente a variazioni di densità, le quali se anche piccole, non possono essere trascurate. Indichiamo con ρ, ρ_1, ρ' le densità rispettivamente alle temperature T, T_1, T'. Supponiamo che nell'intervallo $[T_1, T']$ la densità vari linearmente, cioè

$$\rho(T_1) = \rho_1, \quad \rho(T') = \rho'$$

e calcolandone la media aritmetica:

$$\rho_m = \frac{\rho_1 + \rho'}{2}$$

Scriveremo dunque

$$\rho - \rho_1 = -\rho_m \beta (T - T_1) \tag{8}$$

Il coefficiente β si ricava dal coefficiente di dilatazione δ come segue

$$\frac{\rho'}{\rho_1} = \frac{1 + T\delta}{1 + T'\delta} \Longrightarrow \frac{\rho' - \rho_1}{\rho' + \rho_1} = \frac{(T_1 - T')}{2 + (T_1 - T')} \Longrightarrow \rho' - \rho_1 = -\rho_m \frac{T' - T_1}{1 + \frac{T_1 + T'}{2}\delta}$$

Quindi

$$\beta = \frac{\delta}{1 + \frac{T_1 + T'}{2}\delta} \tag{9}$$

Poniamo per definizione:

$$p' = p + \rho_1 g z \tag{10}$$

Con il fluido in quiete è ρ_1 =costante $\Longrightarrow p'$ =costante. Si ha allora:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p'}{\partial x}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p'}{\partial y}; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p'}{\partial z} - \rho_1 g \tag{11}$$

da cui

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = \frac{\partial p'}{\partial z} + (\rho - \rho_1) g$$

e per la (8):

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = \frac{\partial p'}{\partial z} - \rho_m \beta g (T - T_1) \tag{12}$$

Sostituendo le prime due delle (11) e la (12) nelle equazioni (7), e scrivendo ρ_m invece di ρ al primo membro delle (7), in cui si considera costante la densità, otteremo

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \eta \nabla^2 u_x \\ \rho \frac{\partial u_y}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial y} + \eta \nabla^2 u_y \\ \rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \rho_m \beta g (T - T_1) + \eta \nabla^2 u_z \end{cases} \tag{13}$$

Ricordiamo l'*equazione fondamentale della trasmissione di calore per convezione*

$$\alpha^2 \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} u_x + \frac{\partial T}{\partial y} u_y + \frac{\partial T}{\partial z} u_z, \quad \text{dove } \alpha^2 = \frac{k}{c_p \rho} \text{ in } \mathrm{m}^2 / \mathrm{s} \tag{14}$$

dove k è il coefficiente di conduttività, e c_p è il calore specifico a pressione costante. La superficie σ_p del corpo che scambia calore con il fluido sia espressa dall'equazione:

$$f\left(\frac{x}{D}, \frac{y}{D}, \frac{z}{D}\right) = 0 \tag{15}$$

la quale può rappresentare un gruppo di superfici geometricamente simili e similmente orientate rispetto all'asse z verticale (supposto che nelle vicinanze non ci siano altri corpi). A questo punto abbiamo tutti gli elementi per conoscere il flusso $\Phi = -\operatorname{grad} T$ attraverso la predetta superficie:

$$\Phi = F\left(D, \rho_m, \eta, \rho_m \beta g, \alpha^2, T' - T_1\right) \tag{16}$$

equazione dimensionalmente omogenea che dipende unicamente dalla determinazione della (15). Procedendo come abbiamo già visto in altri esercizi, scriviamo:

$$H = D^a \rho_m^b \eta^c \left(\rho_m \beta g\right)^d \left(\alpha^2\right)^e \left(T' - T_1\right)^f \tag{17}$$

Posto che la dimensione di temperatura sia θ imporremo che la dimensione di H sia quella di Φ cioè θL:

$$\theta L = L^a \left(ML^{-3}\right)^b \left(ML^{-1}t^{-1}\right)^c \left(ML^{-2}t^{-2}\theta^{-1}\right)^d \left(L^2 t^{-1}\right)^e \theta^f \tag{18}$$

Uguagliando gli esponenti delle singole variabili nei due membri, si ottiene:

$$\begin{cases} \text{per } \theta & 1 = -d + f \\ \text{per } M & 0 = b + c + d \\ \text{per } L & 1 = a - 3b - c - 2d + 2e \\ \text{per } t & 0 = -c - 2d - e \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 + 3d \\ b = d + e \\ c = -2d - e \\ f = 1 + d \end{cases} \tag{19}$$

Sostituendo nella (17):

$$H = D\left(T' - T\right)\left[\frac{D^3 \rho_m \left(\rho_m \beta g\right)\left(T' - T_1\right)}{\eta^2}\right]^d \left(\frac{\rho_m \alpha^2}{\eta}\right)^c$$

Definiamo il **numero di Grashof**:

$$Gr = \frac{D^3 \rho_m \left(\rho_m \beta g\right)\left(T' - T_1\right)}{\eta^2} \tag{20}$$

Il **numero di Prandt**:

$$\Pr = \frac{\eta}{\rho_m \alpha^2} \tag{21}$$

Ne segue

$$\Phi = D\left(T' - T_1\right)\psi\left(Gr, \Pr\right) \tag{22}$$

Nella convezione naturale è molto importante il caso in cui si possono trascurare le accelerazioni delle particelle. Allora nelle equazioni di Navier si annullano i termini del primo membro che hanno ρ_m e di conseguenza la distribuzione di $\operatorname{grad} T$ non dipende da ρ_m. Si giunge in conseguenza ad una relazione analoga alla (16) in cui però non compare più la variabile ρ_m, ma che rimane a formare la variabile $\rho_m \beta g$. Si giunge così ad ottenere il **coefficiente di convenzione naturale**:

$$f = \frac{k}{D} F\left(Gr \cdot \Pr\right)$$

dove k è il coefficiente di conduttività. Definiamo quindi il **coefficiente di convenzione naturale**:

$$Nu = \frac{f \cdot D}{k} \tag{23}$$

Riepiloghiamo alcuni numeri adimensionali, indicando la velocità con u:

numero di Reynolds: $\mathrm{Re} = \frac{uD\rho}{\eta} = \frac{uD}{\eta/\rho} = \frac{uD}{v}$

numero di Prandt: $\Pr = \frac{\eta}{\rho\alpha^2} = \frac{\eta c_p}{k}$

numero di Péclet: $Pe = \frac{uD}{\alpha^2} = \frac{uDc_p\rho}{k} = \mathrm{Re} \cdot \Pr$

numero di Grashof: $Gr = \frac{D^3 \rho_m (\rho_m \beta g)(T' - T_1)}{\eta^2}$

2 Esercizi svolti

Esercizio 1 *L'acqua a* $27\,^{\circ}\mathrm{C}$ *viene riscaldata da una piastra verticale di area* $S = 1/2\,\mathrm{m}$ *che emette una potenza termica di* $Q = 5.73 \cdot 10^7\,\mathrm{J}\,/\,\mathrm{h}$ *(1). Determinare il valore della temperatura della piastra* T_p.

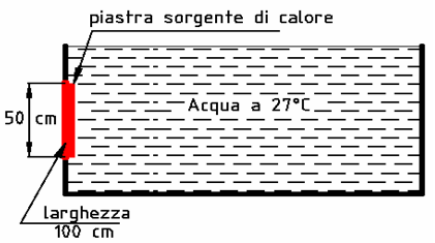


Figura 1: Esercizio 1.

Soluzione

Si adotta un metodo iterativo. Si presume una temperatura della piastra T_p e tramite il numero di Nusselt Nu, viene calcolato il coefficiente di convezione termica k. Il confronto si ferma quando la temperatura assunta è circa uguale a quella calcolata.

$$Q = fS\,(T_p - T_w) \Longrightarrow 5.73 \cdot 10^7 = f \cdot \frac{1}{2} \cdot (T_p - 27) \Longrightarrow f = \frac{1.15 \cdot 10^8}{T_p - 27}$$

La temperatura media del film interfaccia piastra-acqua è

$$T_f = \frac{T_p + 27}{2}$$

La convezione naturale turbolenta, allo strato limite, è data da

$$\frac{fD}{k_f} = Nu = 0.13\,(Ra)^{1/3} \Longrightarrow f = \frac{k_f}{1} \cdot 0.13 \cdot (Ra)^{1/3} \tag{24}$$

dove Ra è il numero di Rayleigh

$$Ra = Gr \cdot \mathrm{Pr} \tag{25}$$

essendo Gr e Pr rispettivamente il numero di Grashof e il numero di Prandt. Per quanto visto in precedenza:

$$Gr \cdot \mathrm{Pr} = a_f D^3\,(T_p - T_w) \tag{26}$$

Segue

$$f = 0.13 \cdot k_f \cdot [a_f\,(T_p - T_w)]^{1/3} = 0.13 \cdot k_f \cdot a_f^{1/3}\,(T_p - 27)^{1/3} \tag{27}$$

Quindi scriveremo

$$f = \frac{1.15 \cdot 10^8}{T_p - 27} = 0.13 \cdot k_f \cdot a_f^{1/3}\,(T_p - 27)^{1/3}$$

da cui

$$\left[\frac{1.15 \cdot 10^8}{(0.13) \cdot k_f \cdot a_f^{1/3}}\right]^{3/4} = T_p - 27 \tag{28}$$

Supponiamo $T_p = 50\,^\circ\mathrm{C} \Longrightarrow T_f = \frac{50+27}{2} \simeq 38\,^\circ\mathrm{C}$. Dalle tabelle dell'acqua si ricava

$$(a_f)_{38\,^\circ\mathrm{C}} = 3.74 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}^{-3}, \quad k_f = 0.363 \frac{Btu}{ft \cdot h \cdot {}^\circ\mathrm{F}} \frac{1055}{0.3} 1.8 = 2300\,\mathrm{J}/mh\,^\circ\mathrm{C}$$

Segue

$$\left\{ 1.15 \cdot 10^8 \cdot \left[0.13 \cdot 2300 \cdot \left(3.74 \cdot 10^{10} \right)^{1/3} \right]^{-1} \right\}^{3/4} = T_p - 24 \Longrightarrow T_p = 62\,^\circ\mathrm{C} \tag{29}$$

Assumiamo allora $T_p = 60\,^\circ\mathrm{C} \Longrightarrow T_f = \frac{60+27}{2} \simeq 44\,^\circ\mathrm{C}$. Dalle tabelle dell'acqua si ricava

$$(a_f)_{44\,^\circ\mathrm{C}} = 4.44 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}^{-3}, \quad k_f = 0.367 \frac{Btu}{ft \cdot h \cdot {}^\circ\mathrm{F}} \frac{1055}{0.3} 1.8 = 2323\,\mathrm{J}/mh\,^\circ\mathrm{C} \tag{30}$$

Dunque

$$\left\{ 1.15 \cdot 10^8 \cdot \left[0.13 \cdot 2323 \cdot \left(4.44 \cdot 10^{10} \right)^{1/3} \right]^{-1} \right\}^{3/4} = T_p - 24 \Longrightarrow T_p = 60\,^\circ\mathrm{C} \tag{31}$$

Esercizio 2 *Un piccolo fornetto elettrico d'officina ha la piastra di riscaldamento alta* 30 cm. *La temperatura superficiale della piastra è di* 232 °C *e la temperatura ambiente è di* 38 °C. *Trovare il coefficiente di convezione termica e il tasso di trasferimento termico, per unità di superficie della piastra. Trascurare lo scambio termico per radiazione.*

Soluzione

Per una piastra verticale a temperatura costante e di altezza $< 1\,\mathrm{m}$ il coefficiente f di convezione naturale è dato dalla relazione

$$Nu = \frac{fD}{k} = a\,(Gr \cdot \mathrm{Pr})^m$$

dove i numeri puri sono già stati introdotti negli esercizi precedenti, e le costanti a e m sono riportate in tabella (2).

Table 1.

Physical Properties of Air at 101.325 kPa (1 Atm Abs)
(English Units)

T (°F)	ρ (lb_m/ft^3)	c_p ($\frac{btu}{lb_m \cdot {}^\circ F}$)	μ (centipoise)	k ($\frac{btu}{h \cdot ft \cdot {}^\circ F}$)	Pr	$\beta \times 10^3$ ($1/{}^\circ R$)	$g\beta\rho^2/\mu^2$ ($1/{}^\circ R \cdot ft^3$)
0	0.0861	0.240	0.0162	0.0130	0.720	2.18	4.39×10^6
32	0.0807	0.240	0.0172	0.0140	0.715	2.03	3.21×10^6
50	0.0778	0.240	0.0178	0.0144	0.713	1.96	2.70×10^6
100	0.0710	0.240	0.0190	0.0156	0.705	1.79	1.76×10^6
150	0.0651	0.241	0.0203	0.0169	0.702	1.64	1.22×10^6
200	0.0602	0.241	0.0215	0.0180	0.694	1.52	0.840×10^6
250	0.0559	0.242	0.0227	0.0192	0.692	1.41	0.607×10^6
300	0.0523	0.243	0.0237	0.0204	0.689	1.32	0.454×10^6
350	0.0490	0.244	0.0250	0.0215	0.687	1.23	0.336×10^6
400	0.0462	0.245	0.0260	0.0225	0.686	1.16	0.264×10^6
450	0.0437	0.246	0.0271	0.0236	0.674	1.10	0.204×10^6
500	0.0413	0.247	0.0280	0.0246	0.680	1.04	0.163×10^6

Figura 2: Esercizio 2.

La temperatura media tra piastra e aria ambiente:

$$T_m = 232 + \frac{38}{2} = 135\,^\circ\mathrm{C}$$

Dalla tabella le caratteristiche dell'aria a 135 °C sono:

$$k = 0.0198 \frac{Btu}{h \cdot ft \cdot {}^\circ\mathrm{F}} \frac{1055}{0.30 \cdot 1/1.8} = 125 \frac{\mathrm{J}}{h \cdot \mathrm{m}\,^\circ\mathrm{C}}$$

$$\rho = 0.0541 \frac{lb_m}{ft^3} \frac{0.45}{0.028} = 0.87\,\mathrm{kg}\,/\,\mathrm{m}^3$$

$$\mu = \text{viscosità dinamica} = (0.0232Cp)\,(2.4191)\,\frac{lb_m}{ft \cdot h} \frac{0.45}{0.30} = 0.0843\,\mathrm{kg}\,/\,\mathrm{m} \cdot h$$

$$\beta = \text{coefficiente di dilatazione dei gas perfetti} = \frac{1}{T_m + 273} = \frac{1}{135 + 273} = 2.45 \cdot 10^{-3}$$

$$\mathrm{Pr} = 0.690, \quad \Delta T = 232 - 38 = 194\,^\circ\mathrm{C}$$

Il numero Gr

$$Gr = \frac{D^3 g \rho^2 \beta \Delta T}{\mu} = 1.74 \cdot 10^8 \tag{32}$$

Quindi $Gr \cdot \mathrm{Pr} = 1.2 \cdot 10^8 \Longrightarrow 10^4 < 1.2 \cdot 10^8 < 10^9$ e dalla tabella di fig. 3 si ha:

$$a = 0.59, \quad m = 1.4 \tag{33}$$

Table 2.

Constants for use with Eq. (1) for Nusselt Number

Physical Geometry	(Gr Pr)	*a*	*m*	*Ref.*
Vertical planes and cylinders [vertical height $L < 1$ m (3 ft)]				
	$<10^4$	1.36	$\frac{1}{5}$	(P1)
	10^4–10^9	0.59	$\frac{1}{4}$	(M1)
	$>10^9$	0.13	$\frac{1}{3}$	(M1)
Horizontal cylinders [diameter D used for L and $D < 0.20$ m (0.66 ft)]				
	$<10^{-5}$	0.49	0	(P1)
	10^{-5}–10^{-3}	0.71	$\frac{1}{25}$	(P1)
	10^{-3}–1	1.09	$\frac{1}{10}$	(P1)
	1–10^4	1.09	$\frac{1}{5}$	(P1)
	10^4–10^9	0.53	$\frac{1}{4}$	(M1)
	$>10^9$	0.13	$\frac{1}{3}$	(P1)
Horizontal plates				
Upper surface of heated plates or lower surface of cooled plates	10^5–2×10^7	0.54	$\frac{1}{4}$	(M1)
	2×10^7–3×10^{10}	0.14	$\frac{1}{3}$	(M1)
Lower surface of heated plates or upper surface of cooled plates	10^5–10^{11}	0.58	$\frac{1}{5}$	(F1)

Figura 3: Esercizio 2.

Ne segue

$$Nu = a\,(Gr \cdot \mathrm{Pr})^m = 0.59\left(1.2 \cdot 10^8\right)^{1/4} = 61.75 \tag{34}$$

$$\Longrightarrow f = \frac{k \cdot Nu}{D} = 25729 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{h} \cdot \mathrm{m}^2\,^\circ\mathrm{C}}$$

che è il coefficiente di convezione termica. Il calore trasferito per m^2 è

$$f \cdot \Delta T = 25729 \cdot 194 \simeq 5000\,\mathrm{kJ}\,/\,\mathrm{h} \cdot \mathrm{m}^2 \tag{35}$$

Esercizio 3 *Determinare la temperatura media della parte supponendo che tutta la potenza radiante incidente venga per convezione naturale nell'aria circostante.*

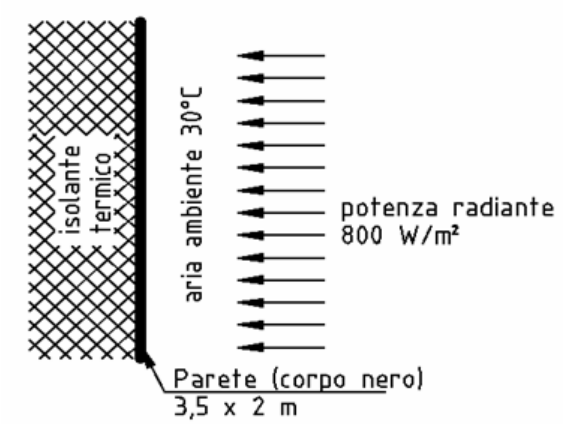


Figura 4: Esercizio 3.

Soluzione

La temperatura superficiale della parete e il coefficiente di scambio termico sono sconosciuti. Possiamo iniziare la soluzione assumendo un coefficiente di scambio termico e con questo calcolare la temperatura superficiale. Quindi, usando il numero di Nu, si può valutare un nuovo coefficiente di scambio. Questa procedura proseguirà fino a quando il valore del coefficiente assunto uguaglierà il Nu calcolato.

Scegliamo come grandezza lineare da usare nei calcoli $D = 3.5\,\mathrm{m}$.

Proprietà fisiche dell'aria a pressione atmosferica - Unità SI

T (°C)	T (°K)	ρ (kg/m³)	C_p (kJ/kg·K)	μ × 10^6 (Pa·s,or kg/m·s)	k (W/m·k)	Pr	β×10^3 (1/K)	$g\beta\rho^2/\mu^2$ (1/K·m³)
−17.8	255.4	1.379	1.0048	1.62	0.02250	0.720	3.92	2.79 × 10^8
0	273.2	1.293	1.0048	1.72	0.02423	0.715	3.65	2.04 × 10^8
10.0	283.2	1.246	1.0048	1.78	0.02492	0.713	3.53	1.72 × 10^8
37.8	311.0	1.137	1.0048	1.90	0.02700	0.705	3.22	1.12 × 10^8
65.6	338.8	1.043	1.0090	2.03	0.02925	0.702	2.95	0.775 × 10^8
93.3	366.5	0.964	1.0090	2.15	0.03115	0.694	2.74	0.534 × 10^8
121.1	394.3	0.895	1.0132	2.27	0.03323	0.692	2.54	0.386 × 10^8
148.9	422.1	0.838	1.0174	2.37	0.03531	0.689	2.38	0.289 × 10^8
176.7	449.9	0.785	1.0216	2.50	0.03721	0.687	2.21	0.214 × 10^8
204.4	477.6	0.740	1.0258	2.60	0.03894	0.686	2.09	0.168 × 10^8
232.2	505.4	0.700	1.0300	2.71	0.04084	0.684	1.98	0.130 × 10^8
260.0	533.2	0.662	1.0341	2.80	0.04258	0.680	1.87	1.104 × 10^8

Figura 5: Esercizio 3.

Assumiamo quindi

$$f = 10\,\mathrm{W}\,/\,\mathrm{m}^2\,^\circ\mathrm{C}$$

Ne segue la potenza termica per m^2:

$$800\,\mathrm{W}\,/\,\mathrm{m}^2 = f\Delta T \Longrightarrow \Delta T = q/f = 80\,^\circ\mathrm{C}$$

Quindi

$$T_f = \frac{80}{2\,\mathrm{m}\ \text{ di larghezza}} + 30 = 70\,^\circ\mathrm{C}$$

A 70 °C dalla tabella ricaviamo

$$\text{viscosità cinematica} = v = \frac{\mu}{\rho} = \frac{2.05 \cdot 10^{-5}}{1.03} = 2 \cdot 10^{-5}$$
$$\beta = \frac{1}{273 + 70} = 2.92 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$$
$$\text{coefficiente di conduttività} = k = 0.0295\,\mathrm{W}\,/\,(\mathrm{m}\,^\circ\mathrm{C})^{-1}\,; \quad \mathrm{Pr} = 0.7$$

Il numero di Grashof:

$$Gr = \frac{D^3\rho^2\beta\Delta T}{\mu^2} = \frac{D^3\rho^2\beta}{\mu^2/\rho^2}\frac{q}{k} = 2.91 \cdot 10^{14} \tag{36}$$

Il flusso d'aria attorno alla parete è turbolento perché è $Gr > 10^9$. Quindi il Nu vale:

$$Nu = 0.17\,(Gr \cdot \mathrm{Pr})^{1/4} = 642 \Longrightarrow Nu = 642 = \frac{fD}{k} = \frac{f \cdot 3.5}{0.0295}$$
$$f = \frac{642 \cdot 0.0295}{3.5} = 5.41\,\mathrm{W}\,/\,\mathrm{m}^2\,^\circ\mathrm{C}$$

In un regime turbolento il coefficiente f non varia in modo apprezzabile, pertanto assumiamo $f = 5.41$ per nuove iterazioni.

$$\Delta T = q/f = 148\,^\circ\mathrm{C} \Longrightarrow T_f = \frac{148}{2} + 30 = 104\,^\circ\mathrm{C} \tag{37}$$

Le proprietà dell'aria a 104 °C sono:

$$\nu = 2.354{\cdot}10^{-5}\,\mathrm{m}^2\,/\,\mathrm{s}, \quad \beta = \frac{1}{273 + 104} = 2.65{\cdot}10^{-3}, \; k = 0.032\,\mathrm{W}\,/\,\mathrm{m}\,^\circ\mathrm{C}, \; \mathrm{Pr} = 0.695 \tag{38}$$

Il numero di Grashof:

$$Gr = \frac{D^3\rho^2\beta\Delta T}{\mu^2} = \frac{D^3\rho^2\beta}{\mu^2/\rho^2}\frac{q}{k} = 1.76 \cdot 10^{14} \tag{39}$$

Segue

$$Nu = 0.17\,(Gr \cdot \mathrm{Pr})^{1/4} = 565 \Longrightarrow Nu = 565 = \frac{fD}{k} = \frac{f \cdot 3.5}{0.0320}$$
$$f = 5.17\,\mathrm{W}\,/\,\mathrm{m}^2\,^\circ\mathrm{C}; \quad \Delta T = \frac{q}{f} = 155\,^\circ\mathrm{C}$$

Ne concludiamo che la temperatura media della parete è $155 + 30 = 180\,^\circ\mathrm{C}$.

Esercizio 4 *Determinare la quantità di energia termica oraria trasmessa per convezione naturale da una lastra piana quadrata orizzontale di lato* $D = 0.2\,\mathrm{m}$ *riscaldata a* $150\,^\circ\mathrm{C}$ *all'aria ambiente a* $27\,^\circ\mathrm{C}$. *La tabella mostra le equazioni empiriche usate nella convezione naturale.*

Soluzione
La temperatura del film tra piastra e aria ambiente è

$$T_m = 150 + \frac{27}{2} = 88.5\,^\circ\mathrm{C} = 361.5\,\mathrm{K}, \qquad \Delta T = 150 - 27 = 123\,^\circ\mathrm{C}$$

CONVEZIONE NATURALE – EQUAZIONI EMPIRICHE LASTRE PIANE ORIZZONTALI IN ARIA A CONDIZIONI STANDARD		
Configurazione	**Equazione**	
	Regime turbolento $2x10^7 < (Gr\ Pr) < 3x10^{10}$	Regime laminare $10^5 < (Gr\ Pr) < 2x10^7$
Riscaldata rivolta verso l'alto	$f = 5470 \Delta t^{1/3}$	$f = 0.23(\Delta t / L)^{1/4}$
Riscaldata rivolta verso il basso		$f = 0.10(\Delta t / L)^{1/4}$
Raffreddata rivolta verso l'alto		$f = 0.10(\Delta t / L)^{1/4}$
Raffreddata rivolta verso l'alto	$f = 5470 \Delta t^{1/3}$	$f = 0.23(\Delta t / L)^{1/4}$

Figura 6: Esercizio 4.

Il numero di Grashof è

$$Gr = \frac{D^3 \rho^2 \beta \Delta T}{\mu^2} = \frac{D^3 \rho^2 \left(1/T_m\right) \Delta T}{\mu^2/\rho^2} = 5.7 \cdot 10^7$$

Il numero di Prandt:

$$\mathrm{Pr} = \frac{\mu c_p g}{k} = 0.693, \qquad Gr \cdot \mathrm{Pr} = 3.95 \cdot 10^7$$

Dalla tabella concludiamo che siamo in regime turbolento, quindi

$$f = 5470 \left(\Delta T\right)^{1/3} = 27.205 \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{h\,m^2\,^\circ C}}$$

Dunque la quantità di calore oraria trasmessa all'ambiente è

$$Q = f \cdot S \cdot \Delta T = 27.205 \cdot 0.2^2 \cdot 123 = 134\,\mathrm{kJ\,/\,h}$$

Esercizio 5 *Determinare la quantità di energia termica trasmessa al disco per mantenere le condizioni di fig. 7. Si suppone che il disco scambi calore per convezione.*

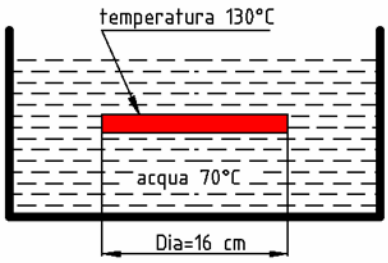


Figura 7: Esercizio 5.

Soluzione

Siano f_t e f_b i coefficienti di convezione superiore e inferiore delle due facce del disco circolare. Termperatura media:

$$T_m = 130 + \frac{70}{2} = 100\,^\circ\mathrm{C}$$

Differenza di temperatura:

$$\Delta T = 130 - 70 = 60\,^\circ\mathrm{C}$$

Diametro caratteristico del disco:

$$D_c = \frac{\pi D^2/4}{\pi D} = \frac{D}{4} = 0.04\,\mathrm{m}$$

Le caratteristiche dell'acqua alla pressione di 100 kPa e di 100 °C sono:

$$\text{viscosità cinematica} = \nu = \frac{\mu}{\rho} = 0.294 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^2\,/\,s}$$

Coefficiente di dilatazione:

$$\beta = 0.75 \cdot 10^{-3}/\,\mathrm{K}$$

Coefficiente di conduttività:

$$2452\,\mathrm{J\,/\,m\,^\circ C}$$

Numero di Grashof:

$$Gr = \frac{D_c^3 g \beta \Delta T}{\nu^2} = 3.27 \cdot 10^8$$

Il numero di Prandt:

$$\mathrm{Pr} = \frac{\mu c_p g}{k} = 1.74, \qquad Gr \cdot \mathrm{Pr} = 5.7 \cdot 10^8 > 10^7$$

Per la faccia superiore si ha per il numero di Nusselt:

$$Nu_t = 0.15\,(Gr \cdot \mathrm{Pr})^{1/3} = 124$$

Per la faccia inferiore, essendo $3 \cdot 10^5 < Gr \cdot \mathrm{Pr} < 3 \cdot 10^{10}$, si ha

$$Nu_b = 0.27\,(Gr \cdot \mathrm{Pr})^{1/4} = 41.7$$

Segue

$$f_t = \frac{k/3600}{D_c} Nu_t = 2111\,\mathrm{W\,/\,m^2\,K}, \qquad f_b = \frac{k/3600}{D_c} Nu_b = 710\,\mathrm{W\,/\,m^2\,K}$$

Quindi la quantità oraria di calore disperso sarà

$$Q = (f_t + f_b)\,\frac{\pi D^2}{4} \Delta T = 3400\,\mathrm{W\,/\,m^2\,K}$$

Esercizio 6 *Vapor d'acqua saturo a* 3.1 bar *fluisce in un tubo orizzontale di diametro* $D =$ 50 mm. *Determinare la quantità di calore scambiato con aria e acqua circostanti alla temperatura di* 13 °C.

Nello scambio con aria assumere l'emissività del tubo pari a 0.9.

Soluzione

La temperatura del vapor d'acqua saturo secco, corrispondente a 3.1 bar è $T = 134.66\,^\circ\mathrm{C} \simeq 135\,^\circ\mathrm{C}$. La temperatura del film esterno al tubo è

$$T_f = 135 + \frac{13}{2} = 74\,^\circ\mathrm{C} = 347\,\mathrm{K}, \qquad \Delta T = 135 - 136 = 122\,^\circ\mathrm{C}$$

	aria	*acqua*
densità = ρ	$= \frac{101300}{287 \cdot 347} = 1{,}02\ kg/m^3$	$968\ kg/m^3$
viscosità dinamica = μ	$0{,}074\ kg/m \cdot h$	$1{,}404\ kg/m \cdot h$
coeff. conduttività = k	$108\ J/m \cdot h \cdot °C$	$2437\ J/m \cdot h \cdot °C$
coeff. d'espansione = β	$= 1/347 = 2{,}88 \cdot 10^{-3}/°K$	$2{,}88 \cdot 10^{-3}/°K$
calore specifico a p cost. = c_p	$1017\ J/kg°C$	$4225\ J/kg°C$

Figura 8: Esercizio 6.

Noti i significati dei simboli, le caratteristiche di aria e acqua alla pressione atmosferica sono riportati in fig. 8.

Il numero di Grashof

$$Gr = \frac{D^3 g \beta \Delta T}{\mu^2} = 2.67 \cdot 10^9$$

Il numero di Prandt:

$$\mathrm{Pr} = \frac{\mu c_p}{k} = 0.697, \qquad Ra = Gr \cdot \mathrm{Pr} = 0.74 \cdot 10^6$$

Relazione sperimentale per il numero di Nusselt:

$$Nu = 0.27 Ra^{1/4} \simeq 15 \Longrightarrow f = \frac{k}{D} Nu = 32.4 \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{m^2\,h\,°C}}$$

Il calore di convenzione scambiato con acqua per unità di lunghezza del tubo è

$$q = 4679 \cdot \pi \cdot 0.05 \cdot 122 \simeq 25 \frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{m\,°C}}$$

Il calore di convezione scambiato con aria per unità di lunghezza del tubo è

$$q = 3.24 \cdot \pi \cdot 0.05 \cdot 122 \simeq 620 \frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{m\,h\,°C}} \simeq 170 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}}$$

Il calore di radiazione scambiato con aria per unità di lunghezza del tubo è

$$q_r = \varepsilon A \sigma \left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

dove ε è il coefficiente di emissività= 0.9, mentre σ è la costante di Stefan-Boltzmann:

$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\,K^4}}$$

Ne segue

$$q_r = 168 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}}$$

Quindi in totale lo scambio con aria, per unità di lunghezza è $170 + 168 = 338\,\mathrm{W}\,/\,\mathrm{m^2}$.

Esercizio 7 *Deteriminare la temperatura della superficie del cilindro di fig. 9, che scambia con l'ambiente a* $20\,°\mathrm{C}$ *una potenza termica di* $1500\,\mathrm{W}$. *Per il calcolo del coefficiente di convezione riferirsi alla tabella di fig. 10.*

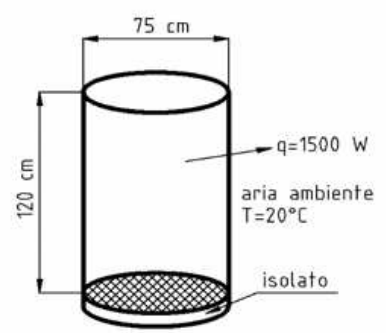


Figura 9: Esercizio 6.

Geometry	Range of application	C	n	L
Vertical planes and	$10^4 < Gr\,Pr < 10^9$	5928	1/4	Height
Vertical cylinders	$10^9 < Gr\,Pr < 10^{12}$	3888	1/3	Height
Horizontal cylinders	$10^3 < Gr\,Pr < 10^9$	5519	1/4	Diameter
	$10^9 < Gr\,Pr < 10^{12}$	3679	1/3	Diameter
Horizontal plates-heated	$10^5 < Gr\,Pr < 2 \times 10^7$	5519	1/4	Length of side
Plated facing up or cooled plated facing down	$2 \times 10^7 < Gr\,Pr < 3 \times 10^{10}$	4497	1/3	Length of side
Cooled plates facing up or heated plated facing down	$3 \times 10^5 < Gr\,Pr < 3 \times 10^{10}$	2453	1/4	Length of side

Figura 10: Esercizio 6.

Soluzione

La potenza termica di 1500 W dispersa nell'ambiente è data dall'equazione

$$q = fA\Delta T$$

dove A è la superficie di scambio, quindi

$$A_H = \pi \cdot \frac{0.75}{4} = 0.44\,\mathrm{m}^2, \quad A_V = \pi \cdot 1.2 = 2.83\,\mathrm{m}^2$$

mentre ΔT è la differenza di temperatura tra la superficie del cilindro e ambiente:

$$\Delta T = T_S - 20$$

Abbiamo poi il coefficiente f. Più precisamente, f_H è il coefficiente di scambio termico dell'area superiore:

$$f_H = C \cdot \left(\frac{\Delta T}{L}\right)^n = 5519 \frac{\Delta T^{1/4}}{0.75^{1/4}} \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{h \cdot m^2 \cdot {}^\circ C}} \left(\frac{^\circ\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\right)^{1/4}$$

f_V è il coefficiente di scambio termico dell'area verticale:

$$f_V = C \cdot \left(\frac{\Delta T}{L}\right)^n = 5528 \frac{\Delta T^{1/4}}{1.2^{1/4}} \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{h \cdot m^2 \cdot {}^\circ C}} \left(\frac{^\circ\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\right)^{1/4}$$

Scriveremo allora

$$1500 \cdot 3600 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{h}} = f_H A_H \Delta T + f_V A_V \Delta T$$

che risolta rispetto a ΔT

$$\Delta T = 5.4 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{5519}{0.75^{1/4}} 0.44 + \frac{5528}{1.2^{1/4}} 2.83\right)^{-4/5} \Longrightarrow \Delta T \simeq 93\,^\circ\mathrm{C} = T_S - 20 \Longrightarrow T_S = 113\,^\circ\mathrm{C}$$

Esercizio 8 *Una sfera metallica di raggio* $R = 25\,\mathrm{mm}$ *e alla temperatura di* $427\,^\circ\mathrm{C}$ *è rapidamente immersa in un liquido mantenuto alla temperatura di* $138\,^\circ\mathrm{C}$. *Stimare la temperatura superficiale della sfera dopo un'ora.*

Il coefficiente conduttivo medio è $f = 41\,\mathrm{kJ}/(\mathrm{m^2\,h\,{}^\circ C})$.

Le proprietà del materiale della sfera sono: $k = 158\,\mathrm{kJ}/(\mathrm{m\,h\,{}^\circ C})$, $\rho = 7907\,\mathrm{kg}/\mathrm{m^3}$, $C_p = 0.464\,\mathrm{kJ}/(\mathrm{kg\,{}^\circ C})$

Soluzione

Metodo 1

Il numero adimensionale di Biot (Bi) presenta le stesse grandezze del numero di Nusset (Nu), ma con la differenza che il Bi si usa per i solidi, mentre il Nu si usa per i fluidi.

$$Bi = \frac{fD}{k}$$

dove

$$D = \frac{\text{volume della sfera}}{\text{superficie della sfera}} = \frac{V}{A} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2} = \frac{R}{3} = 8.33 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

$$\Longrightarrow Bi = \frac{41 \cdot 8.33 \cdot 10^{-3}}{158} < 1 \qquad (Bi = 0.00216)$$

Se $N = T - 138$ è il salto termico tra la superficie della sfera e l'ambiente circostante al tempo generico t, e se dN è la diminuzione del salto termico in un incremento di tempo dt, avremo che il tasso di diminuzione è $-dN/dt$ ed è proporzionale a N. Scriveremo allora:

$$\frac{dN}{dt} = -\xi N$$

dove ξ è la costante di raffreddamento. Indicheremo con $N_0 = 427 - 138 = 289$ il salto termico all'inizio del raffreddamento della sfera. Determiniamo la costante ξ. Si supponga che la temperatura superficiale della sfera sia uniformemente distribuita in tutto il volume della sfera; pertanto il contenuto di calore della sfera al tempo t vale

$$Q_{sfera} = M_{sfera} C_p \,(427 - T) = \rho V C_p \,(427 - T)$$

Allora la frazione

$$\frac{Q_{conv}}{Q_{sfera}} = \text{costante di raffredamento} \Longrightarrow \xi = \frac{fA}{C_p \rho V}$$

Integriamo entro un tempo t:

$$-\frac{dN}{dt} = \xi N \Longrightarrow -\int_{N_0}^{N} \frac{dN'}{N'} = \xi \int_0^t dt' \Longrightarrow -\ln \frac{N}{N_0} = \xi t \Longrightarrow N = N_0 e^{-\xi t}$$

Segue

$$T - 138 = 289 \exp\left(-\frac{fA}{C_p \rho V} t\right) = 289 \exp\left(-\frac{41 \cdot 3}{0.464 \cdot 7907 \cdot 0.025} \cdot t\right)$$

Per un'ora si ha

$$t = 1 \Longrightarrow T - 138 = 289 \exp(-1.341) = 214\,^{\circ}\mathrm{C}$$

Metodo 2

Il numero adimensionale di Biot (Bi) presenta le stesse grandezze del numero di Nusset (Nu), ma con la differenza che il Bi si usa per i solidi, mentre il Nu si usa per i fluidi.

$$Bi = \frac{fD}{k}$$

dove

$$D = \frac{\text{volume della sfera}}{\text{superficie della sfera}} = \frac{V}{A} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2} = \frac{R}{3} = 8.33 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

$$\Longrightarrow Bi = \frac{41 \cdot 8.33 \cdot 10^{-3}}{158} < 1 \qquad (Bi = 0.00216)$$

La differenza tra la temperatura superficiale T della sfera e la temperatura costante del liquido, 138 °C, si può stimare ricorrendo all'equazione esponenziale:

$$T - 138 = 289 \exp\left(-\frac{fA}{C_p \rho V} t\right) = 289 \exp\left(-\frac{41 \cdot 3}{0.464 \cdot 7907 \cdot 0.025} \cdot t\right)$$

Per un'ora si ha

$$t = 1 \Longrightarrow T - 138 = 289 \exp(-1.341) = 214\,^{\circ}\mathrm{C}$$

Riferimenti bibliografici

[1] Foà E., 1964. *Elementi di Fisica Tecnica.* . Università di Bologna.