

Configurazioni di equilibrio di una diffusione virale. Il caso del Coronavirus

Marcello Colozzo – <http://www.extrabyte.info>

1 Popolazione a tre componenti

Il nostro punto di partenza è una *popolazione a tre componenti*:

1. **Attualmente positivi.**
2. **Guariti.**
3. **Deceduti.**

Se $A(t)$, $G(t)$ e $D(t)$ sono le funzioni che conteggiano gli individui di singola componente, si ha che il numero di *contagiati totali* al tempo t , è dato da:

$$N(t) = A(t) + G(t) + D(t) \quad (1)$$

Assumiamo che $N(t)$ sia l'unica soluzione del seguente problema di Cauchy¹:

$$\begin{cases} \dot{N} = \alpha(t) N \\ N(t_0) = N_0 \end{cases}, \quad (2)$$

essendo $t_0 = 0 \text{ d} \equiv 24/02/2020$. Nel paradigma dei sistemi dinamici, la (2) definisce un *sistema non autonomo*, in quanto la funzione $f(t, N) = \alpha(t) N$ a secondo membro della (2) dipende esplicitamente dal tempo. Inoltre, la maggior parte dei modelli di crescita di una popolazione prevedono una proporzionalità tra la velocità di diffusione $\dot{N}$ ed N . Incidentalmente nel caso speciale:

$$\dot{N} = \alpha_0 N, \quad \text{con } \alpha_0 = \text{costante},$$

si ha una crescita esponenziale. In generale il problema (2) ammette l'unica soluzione:

$$N(t) = N_0 e^{\mathcal{A}(t)}, \quad (3)$$

essendo

$$\mathcal{A}(t) = \int_0^t \alpha(t') dt' \quad (4)$$

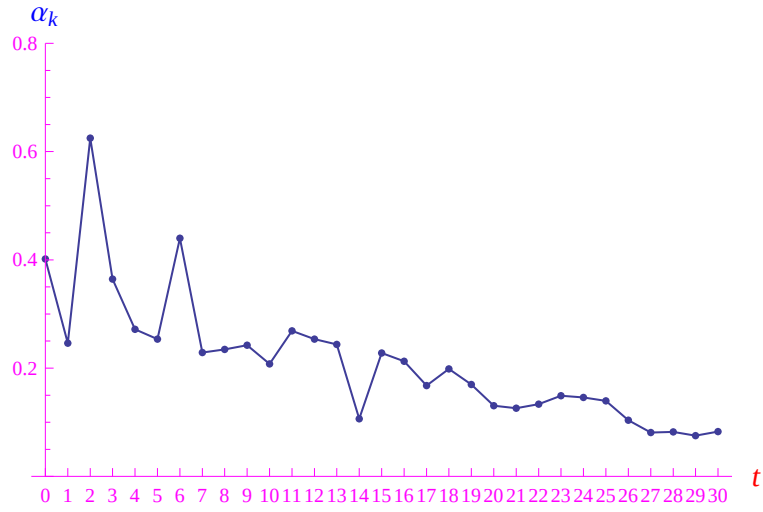
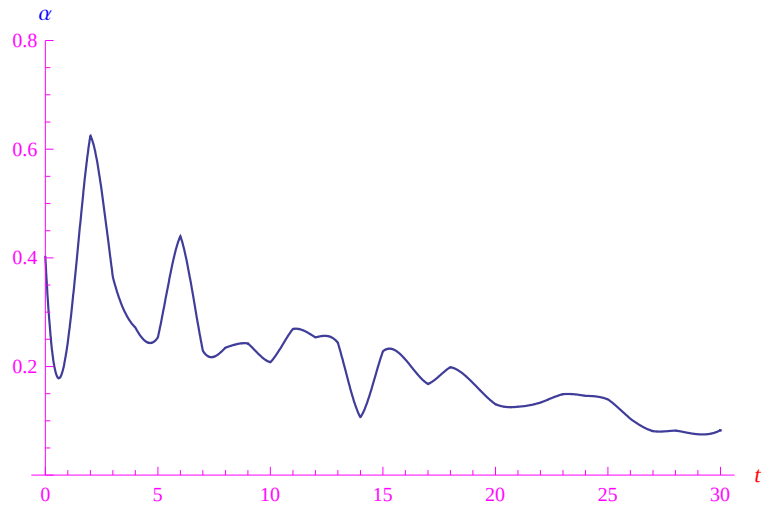
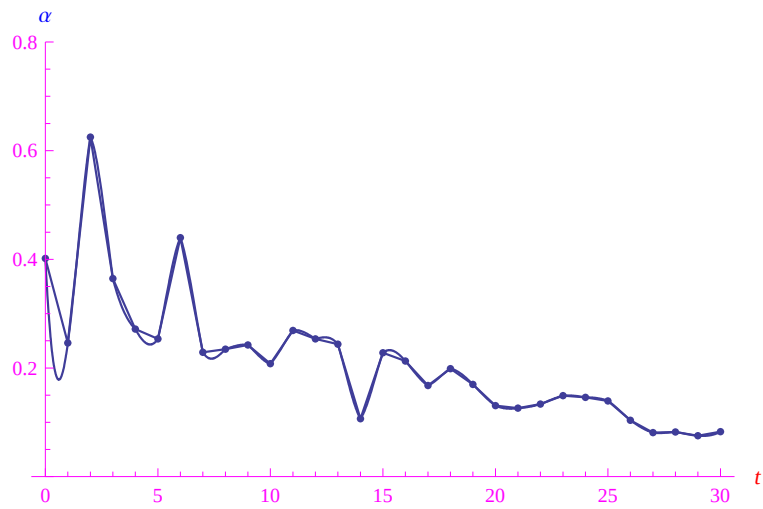
Sfortunatamente non conosciamo la funzione $\alpha(t)$ se non attraverso i dati giornalieri forniti dal sito web della **Protezione civile**. Per poter inserire questi dati in un'equazione differenziale del tipo (2) dobbiamo necessariamente eseguire un campionamento della variabile t con ampiezza di campionamento pari a 1 d, in modo da poter scrivere la (2) nella forma:

$$N_{k+1} - N_k = \alpha_k N_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

Per quanto precede, i dati N_k, N_{k+1} sono forniti dal sito della Protezione civile, per cui possiamo calcolare giornalmente

$$\alpha_k = \frac{N_{k+1} - N_k}{N_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

dove l'intero naturale n identifica l'*istante giornaliero* t_n . Ad esempio, in data odierna (27/03, i dati sono aggiornati al giorno precedente) abbiamo l'andamento graficato in fig. 1.

Figura 1: Andamento di α_k .Figura 2: La funzione $\alpha(t)$ ottenuta per interpolazione.Figura 3: Confronto tra α_k e $\alpha(t)$.

Eseguendo un'interpolazione con Mathematica, otteniamo il grafico di fig. 2, mentre in fig. 3 confrontiamo l'andamento di α_k con quello ottenuto per interpolazione.

In fig. 4 abbiamo evidenziato l'area del rettangoloide $\mathcal{R}_t$ di base $[0, t]$ relativo alla funzione $\alpha(t)$, giacchè la funzione (4) è l'area di $\mathcal{R}_t$. Infatti:

$$\frac{N(t)}{N_0} = e^{mis\mathcal{R}_t} \quad (6)$$

Cioè la popolazione al tempo t normalizzata su N_0 , è l'esponenziale dell'area del rettangoloide $\mathcal{R}_t$ o ciò che è lo stesso

$$mis\mathcal{R}_t = \ln \frac{N(t)}{N_0} \quad (7)$$

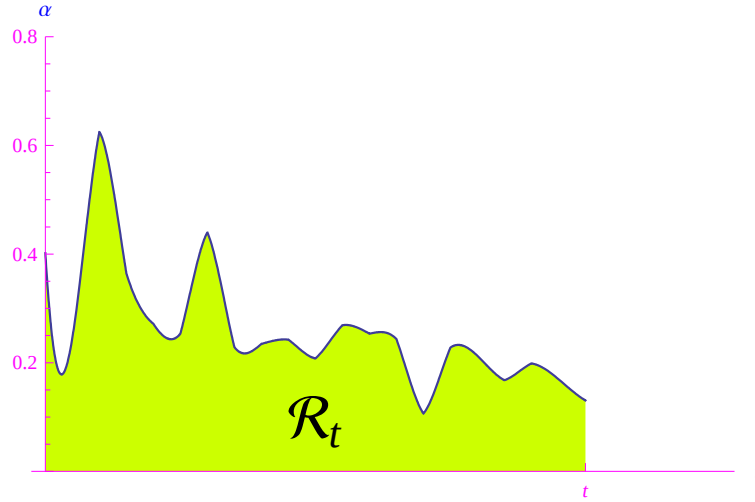


Figura 4: Rettangoloide di base $[0, t]$ relativo alla funzione $\alpha(t)$.

Le considerazioni precedenti suggeriscono di eseguire una qualche stima dell'area di $\mathcal{R}_t$. A tale scopo, per un assegnato $t > 0$ eseguiamo una partizione (di ampiezza costante) dell'intervallo $[0, t]$:

$$t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = t$$

cosicchè

$$[0, t] = \bigcup_{k=0}^{n-1} [t_k, t_{k+1}]$$

L'ampiezza è

$$\delta_n = \frac{t}{n}, \quad (8)$$

mentre i vari punti sono dati da $t_k = k\delta_n$ per $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Al variare di n otteniamo le somme integrali:

$$\sigma(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha(\tau_k) \underbrace{(t_{k+1} - t_k)}_{=\delta_n} = \frac{t}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha(\tau_k), \quad \tau_k \in [t_k, t_{k+1}] \quad (9)$$

Per essere più precisi, la (9) è il termine n -esimo della successione di elementi di $\mathbb{R}$

$$\{\sigma(n)\}_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$$

¹Per la derivata rispetto alla variabile t utilizziamo la notazione puntata, anzichè quella apicale.

Esprimendo n in funzione di δ_n (eq. 8):

$$\sigma(n) = \sigma[n(\delta_n)]$$

Per definizione di integrale definito:

$$mis\mathcal{R}_t = \int_0^t \alpha(t') dt' = \lim_{\delta_n \rightarrow 0} \sigma[n(\delta_n)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma(n)$$

Cioè

$$mis\mathcal{R}_t = t \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k, \quad (10)$$

essendo $\alpha_k = \alpha(t_k)$ avendo preso $\tau_k = t_k$. Nella (10) riconosciamo il teorema della media, giacché

$$\frac{1}{t} \int_0^t \alpha(t') dt' = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \equiv \mu,$$

essendo μ la *media integrale* della funzione $\alpha(t)$ nell'intervallo $[0, t]$. Ne consegue

$$N(t) = N_0 e^{\mu t} \quad (11)$$

Il problema che si apre nell'applicazione della (11) è che non possiamo eseguire il limite per $n \rightarrow +\infty$, giacché tale limite equivale a rendere infinitesima l'ampiezza del singolo intervallino. Nel nostro caso, invece, tale ampiezza è identicamente pari a 1. Ciò implica la seguente approssimazione:

$$\mu \simeq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k,$$

che è proprio ciò che abbiamo fatto nel nostro modello.