Configurazioni di equilibrio di una diffusione virale. Il caso del Coronavirus

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

1 Sistema non autonomo

Il nostro punto di partenza è una *popolazione a tre componenti*:

1. **Attualmente positivi**.
2. **Guariti**.
3. **Deceduti**.

Se $A(t)$, $G(t)$ e $D(t)$ sono le funzioni che conteggiano gli individui di singola popolazione, si ha che il numero di *contagiati totali* al tempo t, è dato da:

$$N(t) = A(t) + G(t) + D(t) \tag{1}$$

Assumiamo che $N(t)$ sia l'unica soluzione del seguente problema di Cauchy[1]:

$$\begin{cases} \dot{N} = f(t, N) \\ N(t_0) = N_0 \end{cases}, \tag{2}$$

essendo $t_0 = 0\,\mathrm{d} \equiv 24/02/2020$. Nel paradigma dei sistemi dinamici, la (2) definisce un *sistema non autonomo*, in quanto la funzione f a secondo membro della (2) dipende esplicitamente dal tempo. Inoltre, la maggior parte dei modelli di crescita di una popolazione prevedono una proporzionalità tra la velocità di diffusione $\dot{N}$ ed N. Incidentalmente nel caso speciale:

$$\dot{N} = \alpha_0 N, \quad \text{con } \alpha_0 = \text{costante},$$

si ha una crescita esponenziale. Ciò suggerisce che nel caso generale la funzione $f(t, N)$ si fattorizza come:

$$f(t, N) = f_1(t) f_2(N),$$

dove $f_2(N)$ è tale che $f_2(0) = 0$. Nell'ipotesi di analiticità delle predette funzioni, possiamo sviluppare $f_2(N)$ in serie di Taylor in un intorno di $N = 0$:

$$f(t, N) = f_1(t) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f_2^{(k)}(0)}{k!} N^k$$

Sostituendo nella (2):

$$\dot{N} = \alpha(t) N + \beta(t) N^2 + \gamma(t) N^3 + ..., \tag{3}$$

dove

$$\alpha(t) \stackrel{def}{=} f_1(t) f_2'(0), \quad \beta(t) = \frac{f_2''(0)}{2!} f_1(t), \quad \gamma(t) = \frac{f_3'''(0)}{3!} f_1(t) \tag{4}$$

Per quanto riguarda i segni:

$$\alpha(t) > 0, \;\; \beta(t) < 0, \;\; \gamma(t) < 0, \;\text{etc.}$$

[1] Per la derivata rispetto alla variabile t utilizziamo la notazione puntata, anzichè quella apicale.

Sviluppiamo ora in serie di Taylor la funzione $f_1(t)$ e quindi, la funzione $\alpha(t)$:

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \frac{\dot{\alpha}(0)}{1!}t + \frac{\ddot{\alpha}(0)}{2!}t^2 + ... \tag{5}$$

A tempi brevi (i.e. $t \ll t_*$, dove t_* è un tempo caratteristico), è lecito troncare entrambi gli sviluppi di Taylor al termine del primo ordine. Ne consegue che all'ordine più basso non nullo, si ha:

$$\dot{N} = \alpha(0)N,$$

cioè l'ordinaria crescita esponenziale. Successivamente ($t \sim t_*$):

$$\dot{N} = \alpha(t)N + \beta(t)N^2,$$

che è un'approssimazione logistica (a patto di sostituire i coefficienti con i valori medi in un opportuno intervallo di tempo). Per $t > t_*$, dobbiamo aggiungere il termine del terzo ordine:

$$\dot{N} = \alpha(t)N + \beta(t)N^2 + \gamma(t)N^3$$

e così via. Ne concludiamo che l'approssimazione logistica è un'approssimazione locale, per cui è valida solo per un intervallo di tempo relativamente breve (fig. 1).

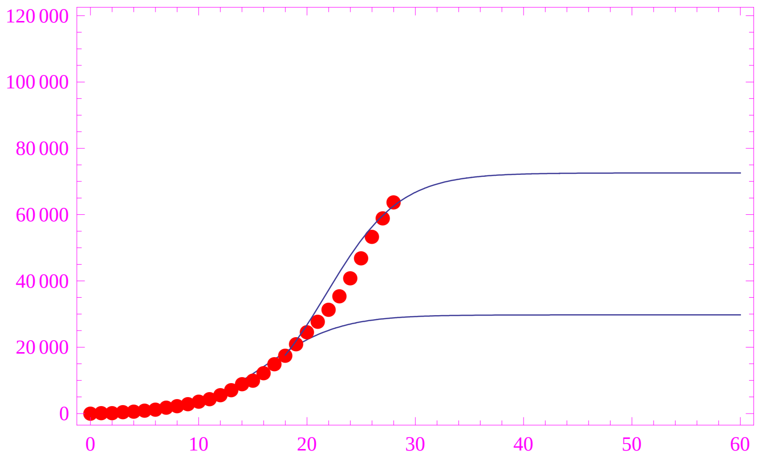

Figura 1: Approssimazione logistica (locale).