Confronto tra infinitesimi

Marcello Colozzo - http://www.extrabyte.info

Sia data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin^2 \frac{1}{x}, & \text{per } x \in [-a, a] \\ 0, & \text{per } x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

manifestamente continua in $x = 0$ (il grafico è in fig. 1).

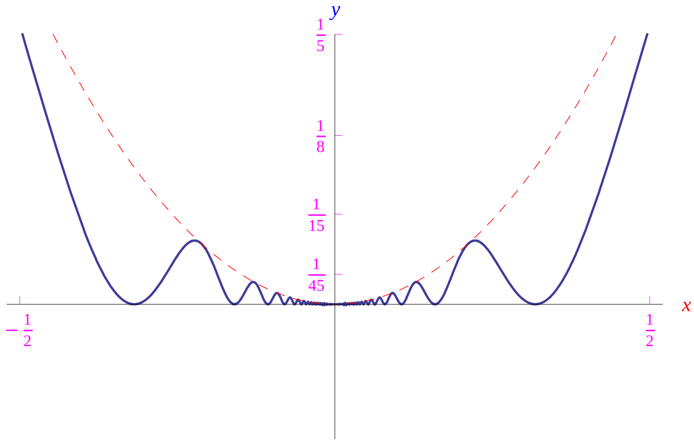

Figura 1: Grafico della funzione (1)

Passiamo allo studio della derivabilità. Nel punto $x = 0$ calcoliamo la derivata applicando la definizione (limite del rapporto incrementale):

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin^2 \frac{1}{x} = 0$$

Cioè la funzione è derivabile in $x = 0$, e ha ivi derivata nulla:

$$f'(0) = 0$$

Negli altri punti, applichiamo le usuali regole di derivazione

$$f'(x) = 2x \sin^2 \frac{1}{x} + \sin \frac{2}{x},$$

per cui

$$\nexists \lim_{x \to 0} f'(x)$$

Cioè $x = 0$ è un punto di discontinuità di seconda specie per $f'(x)$ (si ricordi che avevamo già discusso di un problema simile), per cui tale funzione non è un infinitesimo in $x = 0$. Tuttavia, il rapporto

$$\psi(x) \stackrel{def}{=} \frac{\sqrt{f(x)}}{f'(x)} \tag{2}$$

è ivi regolare:

$$\lim_{x \to 0} \psi(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{2x \sin^2 \frac{1}{x} - \sin \frac{2}{x}} = 0$$

In fig. 2 riportiamo il grafico di $\psi(x)$.

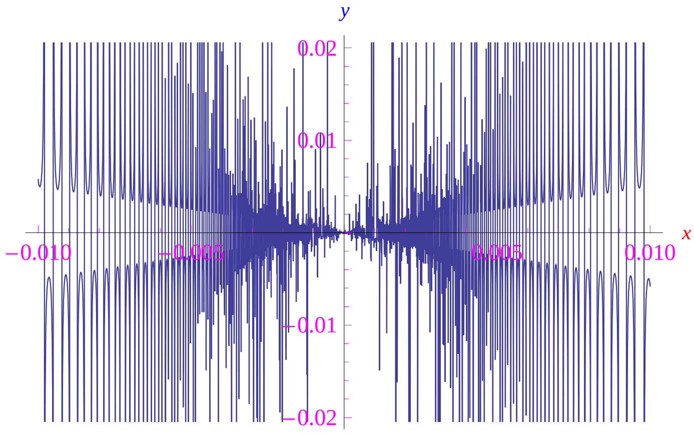

Figura 2: Grafico della funzione (1)