

Nota sulle condizioni di Dirichlet

Marcello Colozzo – <http://www.extrabyte.info>

Come è noto, le *condizioni di Dirichlet* forniscono un criterio sufficiente per la convergenza (puntuale) della serie di Fourier associata a una data funzione periodica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Una di queste condizioni richiede che f sia a *variazione limitata*, i.e. continua a tratti e dotata al più di un numero finito di massimi e minimi. Ad esempio, la ben nota funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

non è variazione limitata, pur essendo continua su tutto l'asse reale. Infatti f compiendo infinite oscillazioni in ogni intorno di $x = 0$, assume infiniti massimi e minimi. Tuttavia, le condizioni di Dirichlet possono essere indebolite, richiedendo che f sia generalmente continua, ossia dotata al più di un numero finito di discontinuità (incluse le singolarità) in ogni intervallo limitato contenuto nel campo di esistenza di f , e che sia sommabile. In parole povere, è sufficiente che le singolarità di f siano isolate e che la funzione medesima sia sommabile, in modo da dare un senso agli integrali che consentono il calcolo dei coefficienti di Fourier. E allora prendiamo come esempio proprio la funzione continua (1). Si badi che tale funzione non è periodica, però possiamo ridefinirla nel seguente modo:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{se } -\frac{1}{\pi} \leq x < 0, 0 < x \leq \frac{1}{\pi} \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

assumendo che sia periodica di periodo $T = \frac{2}{\pi}$, come illustrato in fig. 1.

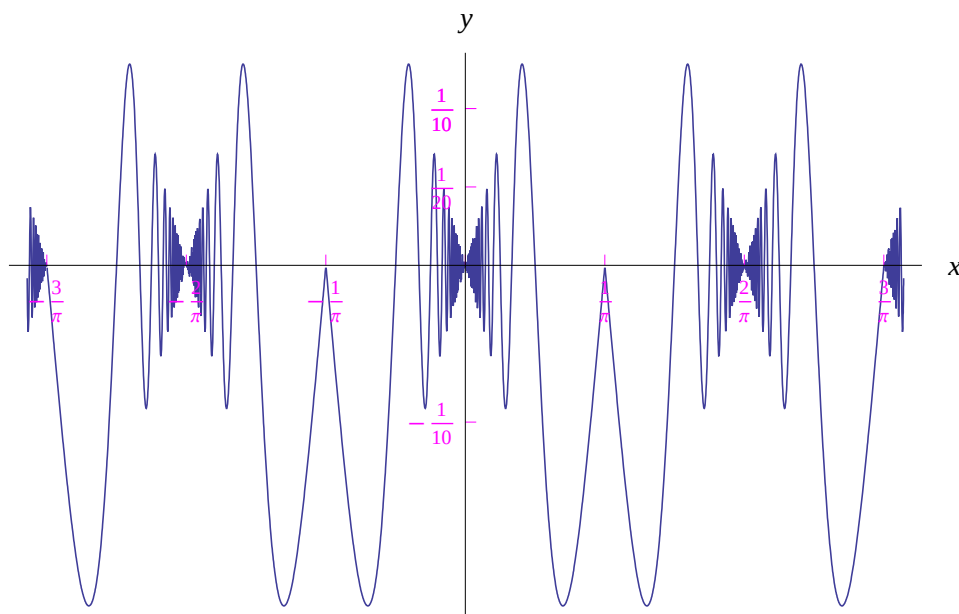


Figura 1: Grafico della funzione periodica (2).

La parità (+1) di f implica uno sviluppo di soli coseni:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\pi^2 x), \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) dx \\
 &= 2\pi \int_0^{1/\pi} x \sin \frac{1}{x} \cos(k\pi^2 x) dx, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)
 \end{aligned} \tag{3}$$

Tali integrali hanno un costo computazionale decisamente alto, a causa delle rapide oscillazioni non solo della funzione $x \sin \frac{1}{x}$ ma anche di $\cos(k\pi^2 x)$. Tuttavia, abbiamo provato a calcolarli numericamente in modo da ricostruire la somma parziale $f_{15}(x)$, ottenendo il grafico di fig. 2.

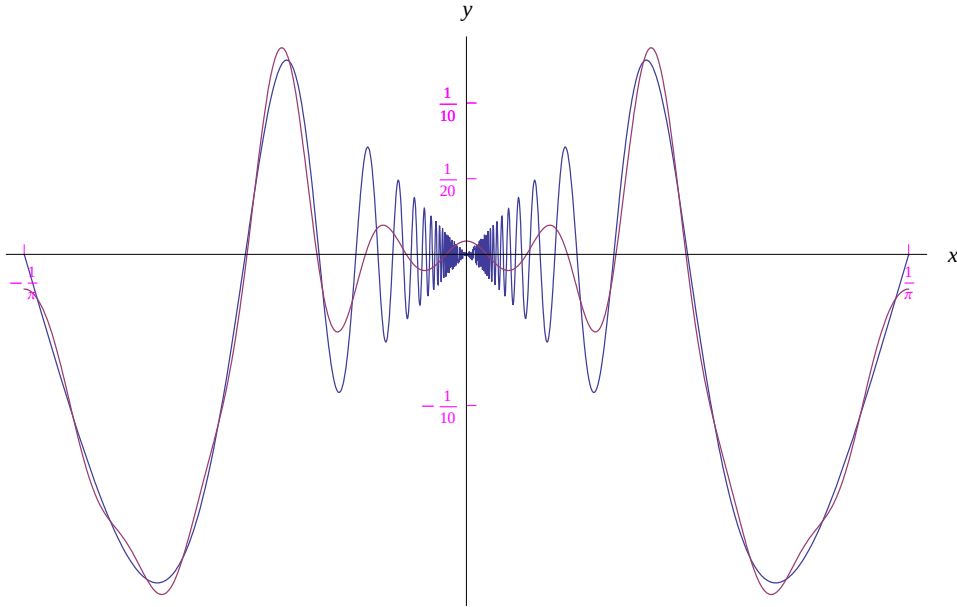


Figura 2: In questo grafico viene confrontata la funzione (2) con la somma parziale $f_{15}(x)$.