Composizione di rotazioni

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Supponiamo di ruotare un vettore $\xi = (x, y, z)$ di $\mathbb{R}^3$ attorno all'asse x di un angolo θ_1. Il vettore risultante viene poi ruotato attorno all'asse z di un angolo θ_2. La prima rotazione è realizzata da

$$\hat{R}_x (x, y, z) = (x, y \cos \theta - z \sin \theta, y \sin \theta + z \cos \theta) , \tag{1}$$

mentre la seconda rotazione

$$\hat{R}_z \left(\hat{R}_x (x, y, z) \right) = \left(\hat{R}_z \hat{R}_x \right) (x, y, z) , \tag{2}$$

avendo applicato la definizione di prodotto di endomorfismi. Se invertiamo l'ordine delle rotazioni, si avrà:

$$\hat{R}_x \left(\hat{R}_z (x, y, z) \right) = \left(\hat{R}_x \hat{R}_z \right) (x, y, z) , \tag{3}$$

Chiediamoci: il risultato della composizione delle predette rotazioni è indipendente dall'ordine in cui esse sono eseguite? Per rispondere a questa domanda osserviamo innanzitutto che tale ordine è indipendente se e solo se:

$$\left(\hat{R}_x \hat{R}_z \right) (x, y, z) = \left(\hat{R}_z \hat{R}_x \right) (x, y, z) , \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \tag{4}$$

Cioè se e solo se

$$\hat{R}_x \hat{R}_z = \hat{R}_z \hat{R}_x \tag{5}$$

Per formalizzare il risultato (5) è conveniente la seguente definizione valida per un qualunque spazio vettoriale E:

Definizione 1 *Per $\hat{A}, \hat{B} \in end (E)$ presi ad arbitrio, si dice* **commutatore** *di $\hat{A}$ e $\hat{B}$, l'endomorfismo:*

$$\left[\hat{A}, \hat{B} \right] = \hat{A} \hat{B} - \hat{B} \hat{A} \tag{6}$$

Definizione 2 *$\hat{A}, \hat{B} \in end (E)$* **commutano** *se*

$$\left[\hat{A}, \hat{B} \right] = \hat{0}, \tag{7}$$

essendo $\hat{0}$ l'endomorfismo nullo:

$$\hat{0} (\xi) = 0_E, \quad \forall \xi \in E \tag{8}$$

In virtù di queste definizioni, si ha che dobbiamo determinare l'endomorfismo $\left[\hat{R}_x, \hat{R}_z \right]$. Tuttavia, è più semplice operare sulle matrici rappresentative, giacché:

$$\left[\hat{R}_x, \hat{R}_z \right] \doteq \left[R_x (\theta_1) , R_z (\theta_2) \right] , \tag{9}$$

dove a secondo membro compare il commutatore di matrici:

$$\left[R_x (\theta_1) , R_z (\theta_2) \right] = R_x (\theta_1) R_z (\theta_2) - R_z (\theta_2) R_x (\theta_1) , \tag{10}$$

con

$$R_x (\theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ 0 & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} , \quad R_z (\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Eseguiamo il prodotto righe per colonne:

$$R_x(\theta_1)\ R_z(\theta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \cos\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_1\cos\theta_2 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_2\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}$$

E

$$R_z(\theta_2)\ R_x(\theta_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \tag{13}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2 & \sin\theta_1\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_1\cos\theta_2 & -\cos\theta_2\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}$$

Segue

$$\left[\hat{R}_x, \hat{R}_z\right] \doteq \begin{pmatrix} 0 & \cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2 \\ \cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2\sin\theta_1 - \sin\theta_1 \\ \sin\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_2\sin\theta_1 - \sin\theta_1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(3,3)} \tag{14}$$

Qui $0_{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(3,3)}$ è l'elemento nullo (i.e. matrice nulla) dello spazio vettoriale $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(3,3)$ delle matrici quadrate su $\mathbb{R}$ di ordine 3. Ne concludiamo che il risultato della composizione delle rotazioni suddette dipende dall'ordine con cui esse vengono eseguite. Tale risultato si estende ai rimanenti assi coordinati, per cui

$$\left[\hat{R}_k, \hat{R}_{k'}\right] \neq \hat{0}, \quad k, k' \in \{x, y, z\}, \ k \neq k' \tag{15}$$