Esercizio n. 115

http://www.extrabyte.info

Studiare il comportamento della funzione:

$$f(x) = \sqrt{1 + \tan x + \tan^2 x}\left(1 - e^{\pi - 2x}\right), \tag{1}$$

in un intorno del punto $x = \frac{\pi}{2}$.

***

Soluzione
Determiniamo il limite sinistro e destro in tale punto.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) &= 0 \cdot \infty \\
&= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1 - e^{\pi - 2x}}{\left(1 + \tan x + \tan^2 x\right)^{-1/2}} \\
&\overset{H}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{2e^{\pi - 2x}}{-\frac{1}{2}\left(1 + \tan x + \tan^2 x\right)^{-3/2}\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2\tan x}{\cos^2 x}\right)} \\
&= -4 \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{e^{\pi - 2x}\cos^3 x \left(1 + \tan x + \tan^2 x\right)^{3/2}}{\cos x + 2\sin x} \\
&= -4 \left(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{e^{\pi - 2x}}{\cos x + 2\sin x}\right)\left[\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \cos^3 x \left(1 + \tan x + \tan^2 x\right)^{3/2}\right]
\end{aligned} \tag{2}$$

Calcoliamo a parte i due limiti:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{e^{\pi - 2x}}{\cos x + 2\sin x} = \frac{1}{2} \tag{3}$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \cos^3 x\left(1+\tan x+\tan^2 x\right)^{3/2} \\
&= 0\cdot\infty \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \cos^3 x\left(\frac{\frac{1}{2}\sin 2x+1}{\cos^2 x}\right)^{3/2} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos^3 x}{\left|\cos^3 x\right|}\left(\frac{1}{2}\sin 2x+1\right)^{3/2} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} (-1)\left(\frac{1}{2}\sin 2x+1\right)^{3/2} \\
&= -1
\end{aligned} \tag{4}
$$

Per cui:

$$
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = 2 \tag{5}
$$

Passiamo al limite per $x\to\frac{\pi}{2}^-$:

$$
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = 0\cdot\infty
$$

Eseguiamo il cambio di variabile: $y=\tan x$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{y\to+\infty} \sqrt{1+y+y^2}\left(1-e^{\pi-2\arctan x}\right) \\
&= \lim_{y\to+\infty} \frac{1-e^{\pi-2\arctan x}}{\left(1+y+y^2\right)^{-1/2}} = \frac{0}{0} \\
&\overset{H}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{\frac{2}{1+y^2}e^{\pi-2\arctan x}}{-\frac{1}{2}\left(1+y+y^2\right)^{-3/2}(1+2y)} \\
&= -4\left(\lim_{y\to+\infty} e^{\pi-2\arctan x}\right)\left[\lim_{y\to+\infty} \frac{\left(1+y+y^2\right)^{-3/2}}{\left(1+y^2\right)(1+2y)}\right] \\
&= -4\cdot 1\cdot\frac{1}{2},
\end{aligned} \tag{6}
$$

cioè:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = -2 \tag{7}$$

Si conclude che $x = \frac{\pi}{2}$ è un punto di discontinuità di prima specie della funzione $f(x)$.