Rango e nullità di un endomorfismo

Marcello Colozzo - http://www.extrabyte.info

Determiniamo rango e nullità dell'endomorfismo di $M_R(2, 2)$ che associa a una matrice X il commutatore $[X, M] = X\, M - M\, X$ dove M è la matrice:

```
In[1]:= M = {{1, 2}, {0, 3}};
```

Scriviamo la più generale matrice X

```
In[2]:= X = {{x1, x2}, {x3, x4}};
```

L'endomorfismo assegnato si scrive:

```
In[6]:= A[X_] := X.M - M.X
```

La base canonica di $M_R(2, 2)$ è

```
In[7]:= E1 = {{1, 0}, {0, 0}}; E2 = {{0, 1}, {0, 0}}; E3 = {{0, 0}, {1, 0}}; E4 = {{0, 0}, {0, 1}};
```

Calcoliamo i trasformati dei vettori di base:

```
In[8]:= A[E1]

Out[8]= {{0, 2}, {0, 0}}

In[9]:= A[E2]

Out[9]= {{0, 2}, {0, 0}}

In[11]:= A[E3]

Out[11]= {{-2, 0}, {-2, 2}}

In[10]:= A[E4]

Out[10]= {{0, -2}, {0, 0}}
```

da cui si determina facilmente la base dell'immagine di A. Per determinare il kernel, definiamo l'equazione:

```
In[12]:= eq = A[X] == 0;
```

Risolviamola:

```
In[15]:= Reduce[eq, {x1, x2, x3, x4}]

Out[15]= x3 == 0 && x4 == x1 + x2
```

È possibile elaborare questo output per determinare la dimensione del kernel. Alternativamente, dobbiamo utilizzare il comando **NullSpace** per calcolare lo spazio soluzione della matrice rappresentativa dell'endomorfismo assegnato. Quest'ultima è:

```
In[22]:= Flatten[A[E2]]

Out[22]= {0, 2, 0, 0}

In[23]:= B = {Flatten[A[E1]], Flatten[A[E2]], Flatten[A[E3]], Flatten[A[E4]]} // Transpose

Out[23]= {{0, 0, -2, 0}, {2, 2, 0, -2}, {0, 0, -2, 0}, {0, 0, 2, 0}}
```

```
In[26]:= B // NullSpace

Out[26]= {{1, 0, 0, 1}, {-1, 1, 0, 0}}
```