Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_\Gamma (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

Esercizio 1. Le proprietà dinamiche di un'automobile vengono studiate attraverso un particolare diagramma: sull'asse delle ascisse si riportano le velocità, mentre sull'asse delle ordinate la grandezza μ_d^{-1}, dove μ_d è il coefficiente di attrito dinamico della superficie su cui poggiano le ruote durante una frenata a ruote bloccate.

1. Assumendo μ_d variabile con la velocità, si dimostri che l'area del rettangoloide relativo alla funzione $\mu_d^{-1} = f(v)$ e di base $[0, v_0]$, dove $v_0 > 0$ è la velocità dell'automobile nell'istante t_0 in cui vengono azionati i freni, è proporzionale al tempo τ di frenata.

2. Se per $v \to 0^+$ la funzione $\mu_d(v)$ è un infinitesimo di ordine α, si dimostri che l'automobile si arresta in un tempo finito per $\alpha < 1$, non si arresta o, ciò che è lo stesso, si arresta in un tempo infinito, per $\alpha \geq 1$.

Svolgimento
Quesito 1
Ricordando che $0 < \mu_d < 1$ e denominando con f la funzione reale della variabile reale v:

$$\begin{aligned} & f : [0, v_0] \to (1, +\infty) \\ & f : v \to \frac{1}{\mu_d}, \quad \forall v \in [0, v_0], \end{aligned} \tag{1}$$

il rettangoloide relativo a f e di base $[0, v_0]$ è:

$$\mathcal{R} = \left\{ (v, \mu_d) \mid 0 \leq v \leq v_0, \quad 0 < \frac{1}{\mu_d} \leq f(v) \right\} \tag{2}$$

La fig. 1 mostra un possibile andamento del grafico della funzione (1).
Posto $S = area(\mathcal{R})$, si ha:

$$S = \int_0^{v_0} f(v)\,dv = \int_0^{v_0} \frac{dv}{\mu_d} \tag{3}$$

Ma

$$\mu_d^{-1} = \frac{g}{|\mathbf{a}|},$$

dove g il modulo del vettore accelerazione di gravità, mentre $\mathbf{a}$ è l'accelerazione dovuta alla forza d'attrito. In altri termini, $|\mathbf{a}| = \mu_d g$ è la decelerazione generata dalla frenata. Quindi:

$$S = g \int_0^{v_0} \frac{dv}{|\mathbf{a}|} \tag{4}$$

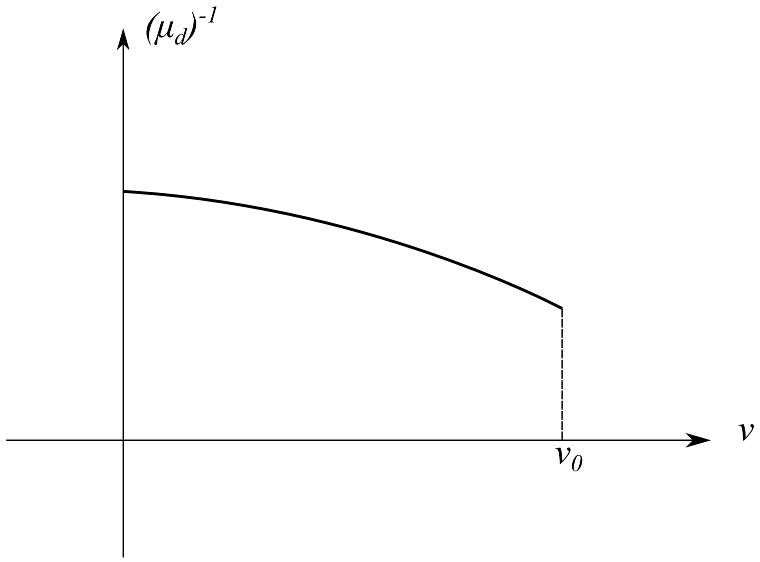

Figura 1: Un possibile andamento del grafico della funzione (1).

In questa equazione $|\mathbf{a}|$ (cioè, la reciproca della funzione integranda) è espressa in funzione della velocità v. Denotiamo con $t_1 > t_0$ l'istante di arresto, ovvero l'istante tale che $v(t_1) = 0$. È chiaro che la funzione $v(t)$ è strettamente decrescente nell'intervallo $[t_0, t_1]$, per cui:

$$\frac{dv}{dt} < 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

Da ciò segue

$$|\mathbf{a}| = -\frac{dv}{dt} \tag{5}$$

Per il calcolo dell'integrale (4) eseguiamo il cambio di variabile $v \to t$. A tale scopo, vediamo come vengono modificati gli estremi di integrazione:

$$t_0 \leq t \leq t_1 \Longrightarrow v_0 \geq v(t) \geq 0,$$

mentre dalla (5) ricaviamo $dv = -|\mathbf{a}|\, dt$. L'integrale diventa:

$$S = -g \int_{t_1}^{t_0} \frac{|\mathbf{a}|\, dt}{|\mathbf{a}|} = +g \int_{t_0}^{t_1} dt = g(t_1 - t_0) = g\tau,$$

dove $\tau = t_1 - t_0$ è il tempo di frenata. Ne concludiamo che l'area del rettangoloide (2) è proporzionale al tempo di frenata τ, e il coefficiente di proporzionalià è l'accelerazione di gravità g.

Quesito 2

Se $g(v) = v$ è l'infinitesimo di riferimento (per $v \to 0$):

$$\exists \alpha > 0 \mid \lim_{v \to 0^+} \frac{\mu_d(v)}{[g(v)]^\alpha} = l \in \mathbb{R} \diagdown \{0\}$$

ciò implica:

$$\lim_{v \to 0^+} \frac{\frac{1}{\mu_d(v)}}{\frac{1}{[g(v)]^\alpha}} = \lim_{v \to 0^+} \frac{\mu_d(v)}{[g(v)]^\alpha} = \left(\frac{1}{l}\right) \in \mathbb{R} \diagdown \{0\},$$

cioè, per $v \to 0^+$ la funzione $\frac{1}{\mu_d(v)}$ è un infinito di ordine α. Un possibile andamento del grafico di $\frac{1}{\mu_d(v)}$ è riportato in fig. 2

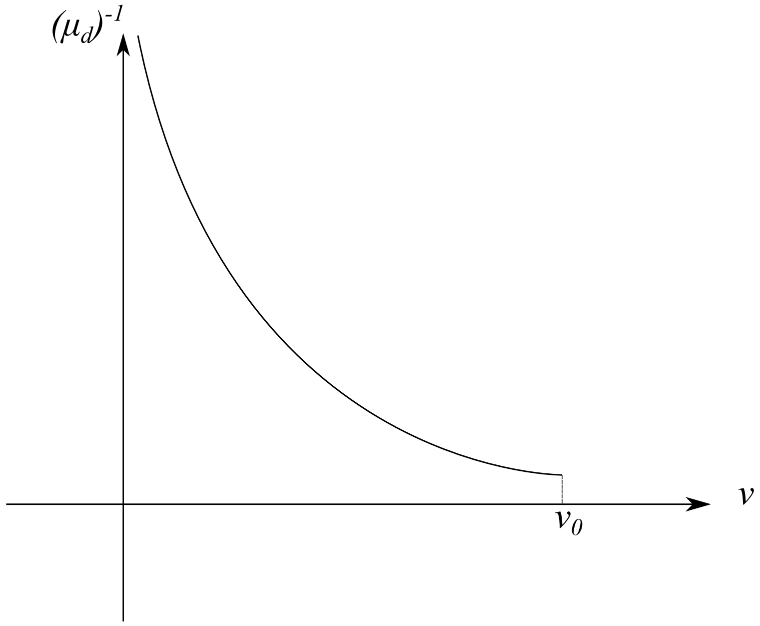

Figura 2: Un possibile andamento del grafico della funzione $\frac{1}{\mu_d(v)}$ se $\mu_d\left(v\right)$ è infinitesima per $v \to 0$.

In tal caso, la funzione (1) non è definita in $v = 0$ e il corrispondente rettangoloide è un rettangoloide generalizzato:

$$\mathcal{R} = \left\{ (v, \mu_d) \mid 0 < v \leq v_0, \quad 0 < \frac{1}{\mu_d} \leq f\left(v\right) \right\}, \tag{6}$$

mentre l'integrale

$$\int_0^{v_0} f\left(v\right) dv = g\tau, \tag{7}$$

è un integrale generalizzato, giacchè l'estremo inferiore di integrazione è una singolarità per la funzione integranda $f\left(v\right)$. In altri termini, $\mathcal{R}$ è un dominio illimitato per cui $area\left(\mathcal{R}\right) \leq +\infty$. Per un noto criterio (condizione sufficiente) se $f\left(v\right)$ è, per $v \to 0$, un infinito di ordine α, l'integrale (7) converge se $\alpha < 1$, diverge se $\alpha \geq 1$. Pertanto la (7) si riscrive:

$$\tau = \frac{1}{g} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{v_0} f\left(v\right) dv = \begin{cases} < +\infty, & \alpha < 1 \\ = +\infty, & \alpha \geq 1 \end{cases}$$