# Le funzioni circolari intere

[Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info]

Facciamo un quadro riassuntivo dei risultati raggiunti negli appunti precedenti. Abbiamo visto che una funzione complessa $f(z)$ è olomorfa in $E \subseteq \mathbb{R}^2$, se esiste un campo $A \subset E$ in cui $f(z)$ è ivi derivabile (in modo complesso). Quindi l'olomorfia può essere interpretata come l'estensione della derivabilità di una funzione reale di una variabile reale. Abbiamo poi stabilito una condizione necessaria e sufficiente per l'olomorfia: $f(z)$ è olomorfa in $A$ se e solo se è ivi differenziabile secondo Stolz e le sue derivate parziali $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ soddisfano l'equazione di Cauchy-Riemann:

$$f_x(x,y) + if_y(x,y) = 0 \tag{1}$$

La dimostrazione di tale teorema ha, tra l'altro, prodotto il risultato notevole:

$$f'(z) = f_x(x,y) \tag{2}$$

o equivalentemente:

$$f'(z) = -if_y(x,y) \tag{3}$$

Siamo ora in grado di stabilire l'olomorfia di una assegnata funzione complessa $f(z)$. A tale scopo dobbiamo seguire il seguente schema di calcolo:

1. studiare la differenziabilità secondo Stolz di $f(z)$ nel suo campo di esistenza o comunque contenuto nell'insieme di esistenza $E$. Ciò si realizza calcolando il limite:

$$\lambda = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta f - [f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

   Se il limite non esiste o riesce $\lambda \neq 0$, allora la funzione non è olomorfa. Se $\lambda = 0$, andiamo al passo 2.

2. Se $f_x(x,y) + if_y(x,y) = 0$ la funzione è olomorfa.

***

Riscriviamo la (**??**):

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \tag{4}$$

Eseguendo la sostituzione $y' = -y$ e tenendo conto della parità delle funzioni $\cos y$ (parità: $+1$) e $\sin y$ (parità: $-1$), otteniamo $e^{-iy'} = \cos y' - i \sin y'$. Trattandosi di una variabile muta:

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y \tag{5}$$

Dalle (4)-(5):

$$2\cos y = e^{iy} + e^{-iy}, \quad 2i \sin y = e^{iy} - e^{-iy}, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Tali relazioni ci consentono di esprimere le funzioni circolari $\sin y$ e $\cos y$ o, ciò che è lo stesso, $\sin x$ e $\cos x$ come combinazione lineare degli esponenziali immaginari $e^{\pm ix}$:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \tag{6}$$

A loro volta, le (6) suggeriscono la seguente estensione delle funzioni circolari $\sin x$ e $\cos x$ al campo complesso:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{7}$$

Le (7) si chiamano *funzioni circolari intere*. Da qui possiamo definire la funzione tangente nel campo complesso:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \mid \cos z \neq 0$$

Verifichiamo l'olomorfia delle funzioni circolari intere. Osserviamo innanzitutto che tali funzioni sono definite su tutto il piano complesso. Anzichè applicare lo schema di calcolo visto in precedenza, è conveniente utilzzare il teorema che fornisce la regola di derivazione (complessa) delle funzioni composte. A tale scopo scriviamo:

$$\cos z = \frac{e^{g(z)} + e^{-g(z)}}{2},$$

dove

$$g(z) = iz \tag{8}$$

Pertanto l'olomorfia di $\cos z$ segue dall'olomorfia di $e^{\pm g(z)}$. Incidentalmente abbiamo la funzione composta:

$$f[g(z)] = e^{g(z)}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Studiamo l'olomorfia di $g(z)$ applicando il suddetto schema di calcolo. La funzione $g(z)$ è definita in $\mathbb{C}$, onde calcoliamo (se esiste) il limite:

$$\lambda = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta g - [g_x(x,y)\,\Delta x + g_y(x,y)\,\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

L'espressione di $g(x,y)$ è:

$$g(x,y) = i(x+iy) = ix - y,$$

da cui:

$$g_x(x,y) = i, \quad g_y(x,y) = -1$$

L'incremento della funzione:

$$\Delta g = i(z + \Delta z) - iz = i\Delta z = i\Delta x - \Delta y$$

Perciò:

$$\lambda = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{i\Delta x - \Delta y - (i\Delta x - \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

da cui la differenziabilità (secondo Stolz) di $g(z)$ su tutto il piano complesso. Riguardo all'equazione di Cauchy-Riemann vediamo che è automaticamente soddisfatta, in quanto $g_x(x,y) + ig_y(x,y) = i - i = 0$. Ne consegue l'olomorfia di $g(z)$ su tutto il piano complesso. Per il citato teorema segue l'olomorfia della funzione composta $f[g(z)] = e^{g(z)}$, giacchè la componente esterna $f(w) = e^w$ è olomorfa. Allo stesso modo si dimostra che $e^{-g(z)}$ è olomorfa su tutto il piano complesso. Da ciò segue l'olomorfia di una combinazione lineare del tipo $e^{g(z)} \pm e^{-g(z)}$ su tutto il piano complesso, e quindi delle funzioni circolari intere $\cos z$ e $\sin z$. A questo punto è immediato calcolare la derivata di tali funzioni. Ad esempio, per la funzione $\cos z$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\cos z &= \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dz}e^{g(z)} + \frac{d}{dz}e^{-g(z)}\right] \\ &= -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \end{aligned}$$

Cioè:

$$\frac{d}{dz}\cos z = -\sin z \tag{9}$$

Alla stessa maniera si perviene al risultato:

$$\frac{d}{dz}\sin z = \cos z \tag{10}$$

Esprimiamo le funzioni circolari intere in termini di parte reale e parte immaginaria. A tale scopo osserviamo che

$$e^{iz} = e^{-y}\left(\cos x + i\sin x\right), \quad e^{-iz} = e^{y}\left(\cos x - i\sin x\right),$$

per cui

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\\ &= \frac{e^{-y}\left(\cos x + i\sin x\right) + e^{y}\left(\cos x - i\sin x\right)}{2}\\ &= \frac{\left(e^{y}+e^{-y}\right)\cos x - i\left(e^{y}-e^{-y}\right)\sin x}{2}\end{aligned}$$

Cioè:

$$\cos z = \cosh y \cos x - i \sin x \sinh y \tag{11}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\cos z &= \cos x \cosh y\\ \operatorname{Im}\cosh z &= -\sin x \sinh y\end{aligned} \tag{12}$$

Nelle figg.1-2. riportiamo i grafici delle funzioni reali delle variabili reali $x, y$ date dalle (12).

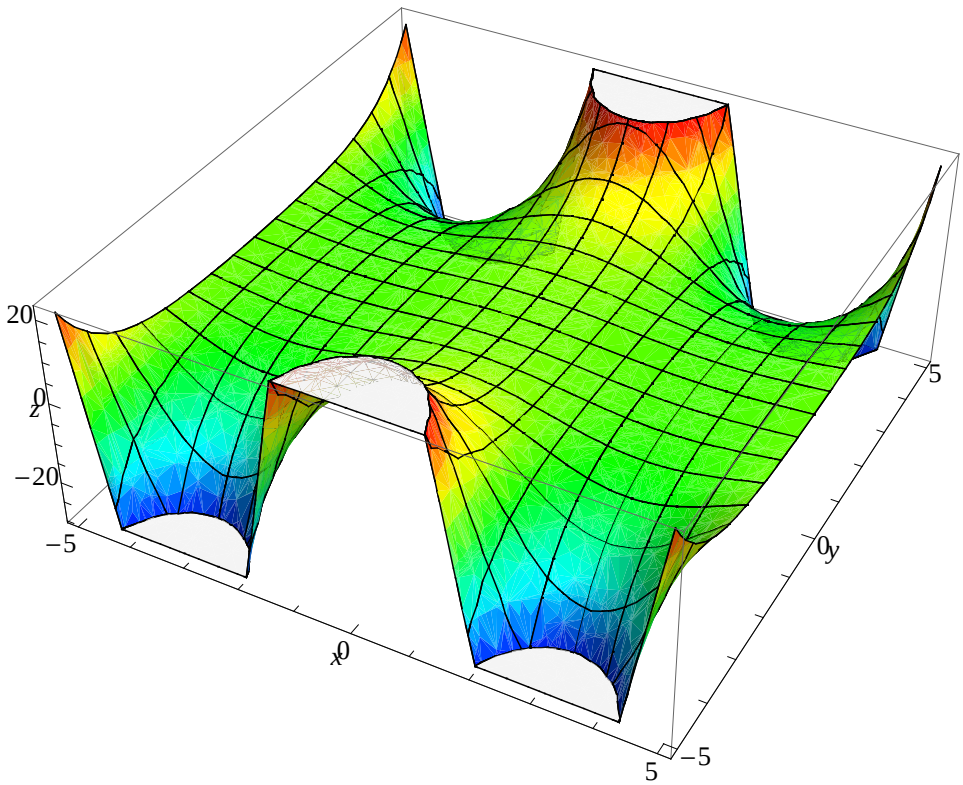


Figura 1: Grafico della funzione $\operatorname{Re}\cos z$.

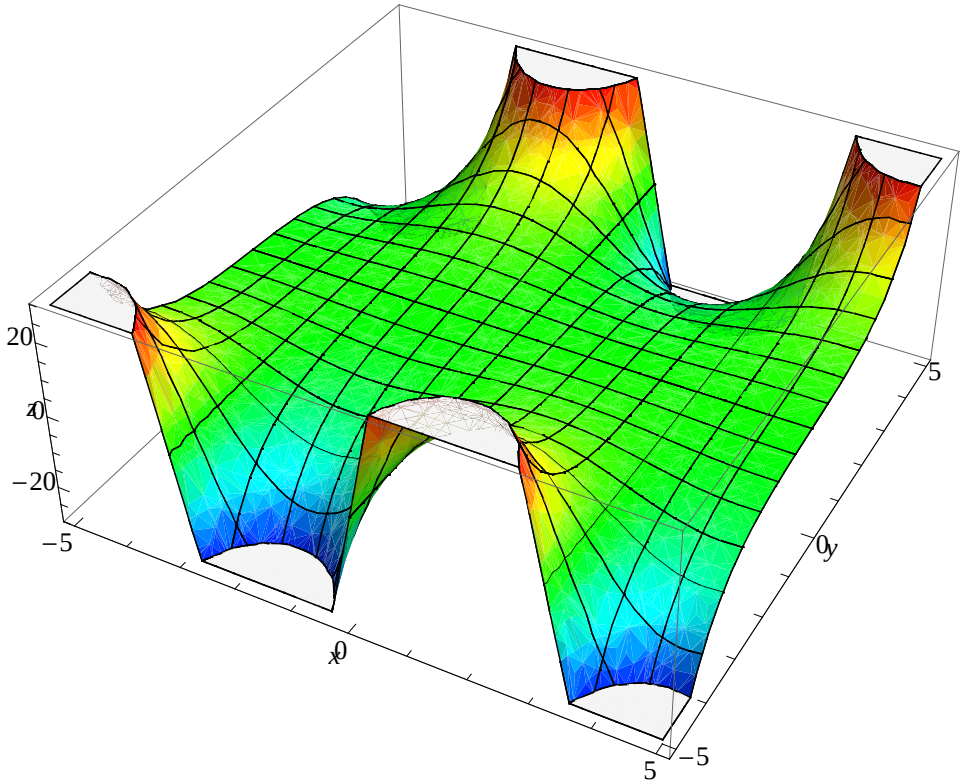


Figura 2: Grafico della funzione $\operatorname{Im} \cos z$.

# Riferimenti bibliografici

[1] FicheraG., De Vito L.: *Funzioni analitiche di una variabile complessa,* Veschi, 1987.