

Matrici di rotazione e curve cicloidali

Marcello Colozzo – <http://www.extrabyte.info>

Al risultato [risultato precedente](#) si perviene utilizzando il formalismo delle matrici di rotazione. In generale, scriviamo le equazioni di trasformazione che legano le coordinate cartesiane (x, y) in un riferimento $\mathcal{R}(Oxy)$ alle coordinate cartesiane (x', y') in un riferimento ruotato rispetto a $\mathcal{R}$ attorno all'origine di un angolo θ in senso orario. È facile ricavare le predette equazioni (cfr. fig. 1):

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \quad (1)$$

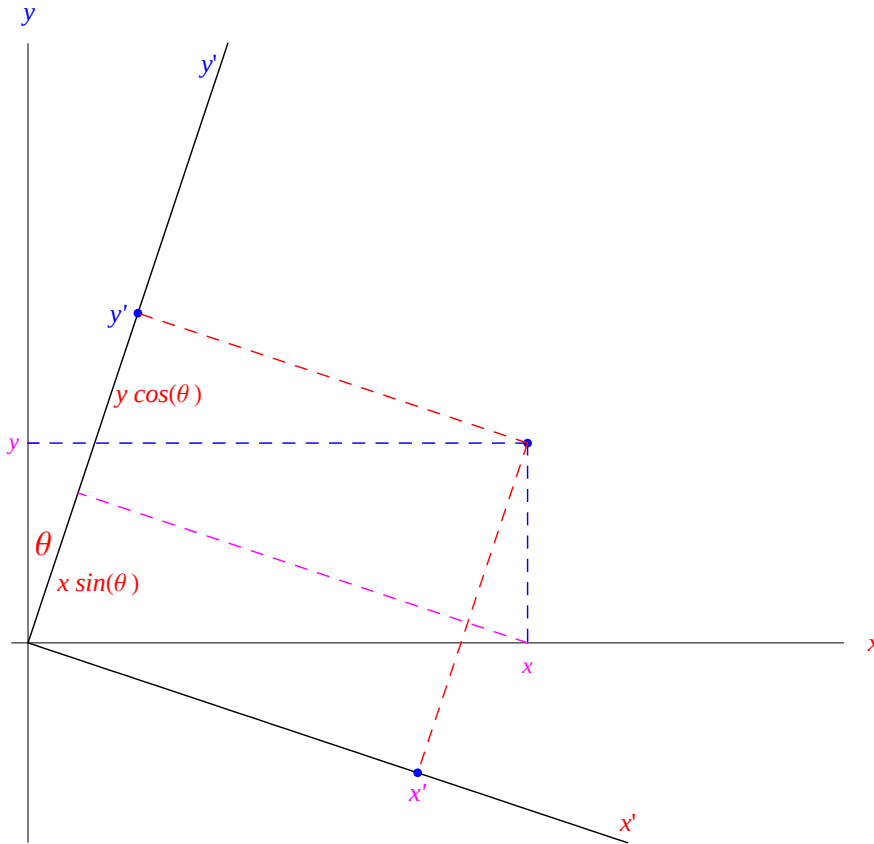


Figura 1: Il riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(Ox'y')$ è ruotato rispetto a $\mathcal{R}(Oxy)$.

Le (1) si esprimono attraverso l'algebra delle matrici. Poniamo innanzitutto:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

ossia il vettore colonna i cui elementi sono le coordinate cartesiane nel riferimento $\mathcal{R}(Oxy)$, e quindi

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

definisce il vettore colonna i cui elementi sono le coordinate cartesiane nel riferimento ruotato $\mathcal{R}'(Ox'y')$. Definiamo poi:

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (2)$$

per cui

$$X' = A(\theta) X \iff \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix},$$

cioè le (1). Riesce

$$\det A(\theta) = 1,$$

cioè A è una matrice ortogonale, per cui denotando con l'apice T la matrice trasposta, si ha

$$A(\theta) A(\theta)^T = A(\theta)^T A(\theta) = I,$$

dove I è la matrice identità. L'ortogonalità deriva dal fatto che ogni rotazione in un qualunque spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ è una trasformazione ortogonale delle coordinate dei punti, giacché tale trasformazione lascia invariata la distanza tra un'arbitraria coppia di punti.

Per quanto precede, l'equazione matriciale

$$X' = A(\theta) X \quad (3)$$

ingloba le equazioni di passaggio dal riferimento cartesiano $\mathcal{R}(Oxy)$ al riferimento ruotato $\mathcal{R}'(Ox'y')$. Possiamo mantenere fisso il sistema di assi cartesiani Oxy , facendo ruotare il punto attorno all'origine di un angolo $-\theta$, attraverso la matrice ortogonale:

$$B(\theta) = A(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

per cui il vettore colonna delle coordinate del punto ruotato è:

$$X' = B(\theta) X$$

Se la rotazione avviene attorno a un punto $C_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ distinto dall'origine, ridefiniamo il punto P (che deve essere ruotato attorno a C_0) in $P_0(x_0, y_0)$, per cui la (3) si generalizza in

$$X = \bar{X}_0 + B(\theta) (X_0 - \bar{X}_0) \quad (4)$$

dove: $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ è il vettore posizione di P_0 , $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è il vettore posizione del punto ruotato, e $\bar{X}_0 = \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{y}_0 \end{pmatrix}$ è il vettore posizione del centro C_0 . Esprimendo θ attraverso una velocità angolare $\omega_0 > 0$

$$\theta = \omega_0 t$$

dove t è il tempo, si ha:

$$X(t) = \bar{X}_0 + B(\omega_0 t) (X_0 - \bar{X}_0) \quad (5)$$

che ci dà il vettore colonna al tempo t , delle coordinate del punto ruotato di un angolo $\omega_0 t$.

La (5) si generalizza ulteriormente, aggiungendo una traslazione in una direzione arbitraria. Precisamente:

$$X(t) = \bar{X}_0 + B(\omega_0 t) (X_0 - \bar{X}_0) + Y(t), \quad (6)$$

essendo $Y(t)$ il vettore colonna che definisce la traslazione. Nel caso della cicloide, la rotazione di un angolo $\theta = \omega_0 t$ è seguita da una traslazione di $R\omega_0 t$ nella direzione positiva dell'asse x positivo, ove R è il raggio del cerchio il cui bordo contiene il punto considerato. Ciò implica:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} v_0 t \\ 0 \end{pmatrix},$$

giacché $v_0 = \omega_0 R$ è la velocità di traslazione. Il centro è posizionato dal vettore colonna:

$$\bar{X}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix},$$

mentre il punto iniziale è rappresentato da $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. In tal modo la (6) porge

$$X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t & \sin \omega_0 t \\ -\sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} v_0 t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Cioè (osservando che $\omega_0 = \frac{v_0}{R}$)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 t - R \sin\left(\frac{v_0 t}{R}\right) \\ R \left[1 - \cos\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\right] \end{pmatrix},$$

cioè

$$x = v_0 t - R \sin\left(\frac{v_0 t}{R}\right), \quad y = R \left[1 - \cos\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\right],$$

che sono quelle trovate in precedenza.

Per quanto precede, la matrice

$$B(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

è una matrice di rotazione nel piano cartesiano Oxy , i.e. nello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$. Tale risultato è una conseguenza della metrica euclidea che, come è noto, è individuata dal tensore metrico

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

che implica $ds^2 = dx^2 + dy^2$, essendo ds la distanza tra (x, y) e $(x + dx, y + dy)$. Consideriamo ora la seguente metrica:

$$g'_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

che è manifestamente pseudoeuclidea, giacché $\det g'_{ik} = -1$. Essa determina l'elemento di distanza $ds^2 = dx^2 - dy^2$. È facile persuadersi che nello spazio pseudoeuclideo con metrica g'_{ik} , la matrice di rotazione $B(\theta)$ si scrive:

$$B(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix},$$

che risulta automaticamente ortogonale. Con tale espressione della matrice $B(\theta)$, la (7) si scrive:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 t - R \sinh\left(\frac{v_0 t}{R}\right) \\ R \left[1 - \cosh\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\right] \end{pmatrix},$$

che individua una rappresentazione parametrica di una *cicloide iperbolica*:

$$x = v_0 t - R \sinh\left(\frac{v_0 t}{R}\right), \quad y = R \left[1 - \cosh\left(\frac{v_0 t}{R}\right)\right] \quad (10)$$

In fig. 2 riportiamo il confronto tra le due cicloidi.

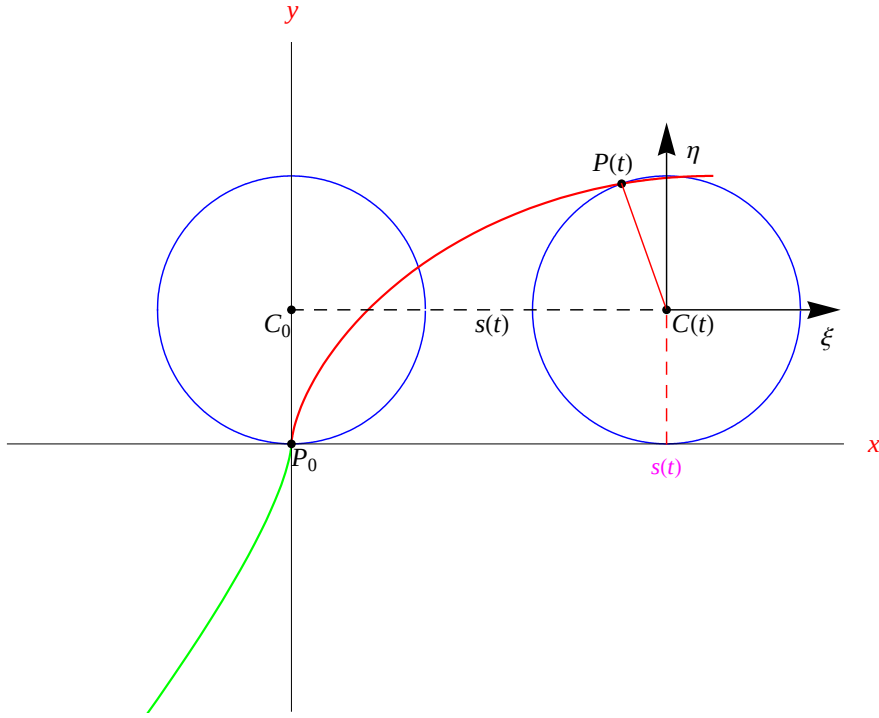


Figura 2: La curva in rosso è l'usuale cicloide nello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$. L'altra curva, invece, è una cicloide in uno spazio pseudoeuclideo 2-dimensionale.