# Appunti di Fisica 1

**Marcello Colozzo** – http://www.extrabyte.info

## 1 Centro di massa e moto del centro di massa

Nel numero precedente abbiamo asserito che in molti casi un sistema meccanico può essere schematizzato da un unico punto in cui si suppone concentrata la massa del sistema medesimo.

Per essere più specifici, consideriamo un sisema costituito da due parti ciascuna delle quali schematizzabile da un punto materiale. Abbiamo, quindi, due punti materiali di massa $m_1$ e $m_2$ rispettivamente. Siano $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ i vettori posizione in un generico istante, dei predetti punti rispetto a un assegnato riferimento inerziale (fig. 1).

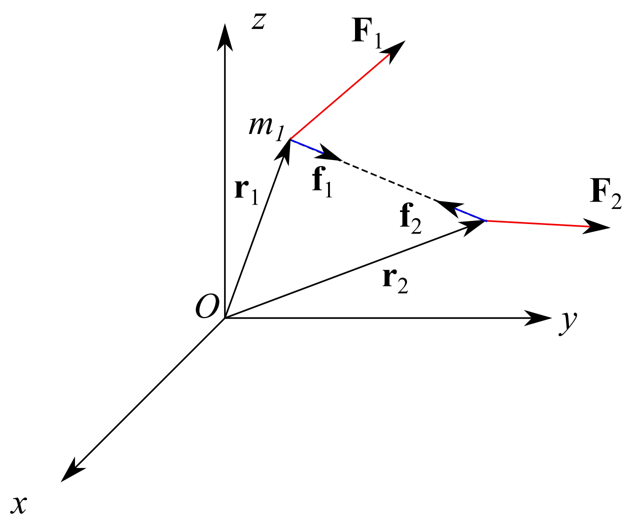


Figura 1: Sistema meccanico costituito da due masse $m_1$ e $m_2$.

Supponiamo che le due masse siano sottoposte alle forze esterne $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$. Rappresentiamo l'interazione reciproca tra $m_1$ e $m_2$ dalle forze interne $\mathbf{f}$ e $-\mathbf{f}$. Applicando il secondo principio della dinamica alle singole masse, si ottiene:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_1 + \mathbf{f} = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 \\ \mathbf{F}_2 - \mathbf{f} = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 \end{cases} \tag{1}$$

Denotando con $\mathbf{F}$ la risultante delle forze esterne, si ha:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2$$

Definiamo la *massa totale* del sistema e un vettore $\mathbf{r}_c$

$$m = m_1 + m_2, \quad \mathbf{r}_c = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m}$$

Otteniamo immediatamente

$$\mathbf{F} = m \ddot{\mathbf{r}}_c \tag{2}$$

Ne segue l'esistenza di un punto di vettore posizione $\mathbf{r}_c$, che si muove come se fosse un punto materiale di massa $m$ e sottoposto alla risultante delle forze esterne applicate al sistema. Tale punto si chiama **centro di massa** del sistema.

Il risultato a cui siamo pervenuti si generalizza facilmente a un sistema meccanico costituito da $n$ punti materiali. A tale scopo, denotiamo con $\mathbf{F}_i$ la forza esterna agente sulla massa $m_i$ e con $\mathbf{f}_i$ la risultante delle forze interne $\mathbf{f}_{ij}$ che le masse $m_j$ $(j = 1, ..., n, \;\; j \neq i)$ esercitano su $m_i$. Cioè

$$\mathbf{f}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \mathbf{f}_{ij}$$

Il secondo principio della dinamica applicato alla massa *i-esima*, si scrive:

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$$

Sommando su tutte le masse e denotando con $\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i$ la risultante delle forze esterne, si ha:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$$

giacché

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \mathbf{f}_{ij} = \mathbf{f}_{21} + \mathbf{f}_{12} + ... = \mathbf{0}$$

in quanto i singoli termini si elidono a vicenda. Definendo

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i, \quad \mathbf{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i$$

si ottiene

$$\mathbf{F} = m\mathbf{r}_c$$