Secondo Teorema di Cauchy

Marcello Colozzo

Teorema 1 *(Secondo Teorema di Cauchy)*

***Hp**: $f(z)$ è una funzione olomorfa nel campo connesso A.*

***Th**: Preso ad arbitrio un dominio regolare D contenuto in A, risulta:*

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{+\partial D}\frac{f(z)\,dz}{z-\zeta}, \qquad \forall \zeta \in \mathring{D} \tag{1}$$

Dimostrazione. Definiamo

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-\zeta},$$

che è manifestamente olomorfa in $A - \{\zeta\}$. Inoltre, l'integrale

$$\oint_{+\partial D} g(z)\,dz$$

ha senso perché $\partial D \subset A'$, che è il campo di olomorfia di $g(z)$, e quindi di continuità di tale funzione. Tuttavia D non è contenuto in A', per cui non possiamo applicare il primo teorema di Cauchy. Allora tracciamo una circonferenza Γ nel dominio D e centrata in ζ, come illustrato in fig. 1. Il raggio di Γ è

$$\rho \in [0, \delta)\,,$$

dove $\delta > 0$ è la distanza tra ζ e ∂D.

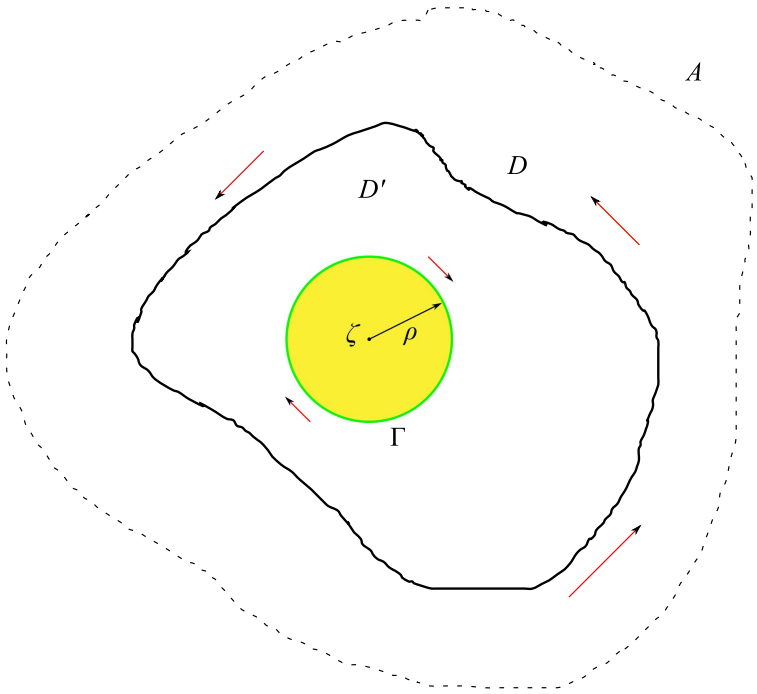

Figura 1: Dimostrazione del teorema 1.

In tal modo è univocamente definito il cerchio aperto centrato in ζ e di raggio ρ:

$$C_\rho(\zeta) = \{z \in D \mid |z-\zeta| < \rho\} \subset D \tag{2}$$

Altrettanto univoco è il dominio

$$D' = D - C_\rho(\zeta) \subset A' \tag{3}$$

Tale relazione di inclusione ci consente di applicare il teorema **??** alla funzione $g(z)$ relativamente al dominio D':

$$\oint_{+\partial D'} g(z)\,dz = 0 \Longleftrightarrow \oint_{+\partial D'} \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta} = 0,$$

dove abbiamo preso il segno superiore $(+)$ per il verso di percorrenza. Notiamo che tale verso è il verso negativo su Γ (vedi fig. 1). Manifestamente

$$\partial D' = \partial D \cup \Gamma,$$

per cui

$$\oint_{+\partial D} \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta} + \oint_{-\Gamma} \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta} = 0 \Longrightarrow \oint_{+\partial D} \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta} = -\oint_{-\Gamma} \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta}$$

Cioè

$$\oint_{+\partial D} \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta} = \oint_{+\Gamma} \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta} \tag{4}$$

Dal momento che il primo membro non dipende dal raggio ρ, si ha che anche il secondo membro è indipendente da ρ. Più precisamente, se definiamo la funzione della variabile reale ρ:

$$F(\rho) = \oint_{+\Gamma} \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta},$$

segue

$$F(\rho) = \text{costante} \equiv c, \quad \forall \rho \in [0, \delta)$$

Evidentemente

$$\lim_{\rho \to 0^+} F(\rho) = c \tag{5}$$

Segue

$$\oint_{+\partial D} \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta} = \lim_{\rho \to 0^+} \oint_{+\Gamma} \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta} \tag{6}$$

Per calcolare il limite, dobbiamo innanzitutto esplicitare l'integrale. A tale scopo scriviamo $\zeta = \xi + i\eta$, da cui una rappresentazione parametrica di Γ

$$x = \xi + \rho\cos t, \quad y = \eta + \rho \sin t, \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

Quindi

$$z = \xi + \rho\cos t + i\eta + i\rho\sin t = \zeta + \rho e^{it},$$

per cui

$$dz = i\rho e^{it}$$

Ne segue

$$\oint_{+\Gamma} \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta} = \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta + \rho e^{it})\, i\rho e^{it}}{i\rho e^{it}} dt = i\int_0^{2\pi} f\left(\zeta + \rho e^{it}\right) dt$$

Per un assegnato ζ, la funzione $f(\zeta + \rho e^{it})$ delle variabili reali ρ, t è continua in

$$[0, 2\pi] \times [0, \delta)$$

Per un noto teorema, l'integrale

$$\int_0^{2\pi} f\left(\zeta + \rho e^{it}\right) dt$$

è una funzione continua di ρ in $[0, \delta)$, onde

$$\begin{aligned}\lim_{\rho \to 0^+} \int_0^{2\pi} f\left(\zeta + \rho e^{it}\right) dt &= \int_0^{2\pi} f\left(\zeta + \rho e^{it}\right)\Big|_{\rho=0} dt \\ &= \int_0^{2\pi} f\left(\zeta\right) dt = 2\pi f\left(\zeta\right),\end{aligned}$$

onde l'asserto. ■

0.1