Carrucola mobile

Marcello Colozzo http://extrabyte.infohttp://extrabyte.info

Esercizio 1 *Nel sistema meccanico di fig. 1 una molla ideale di costante elastica k, è collegata a una fune f inestensibile e di massa trascurabile, che attraversa le gole di due carrucole di cui una fissa e l'altra mobile, per poi avvolgersi in una terza carrucola fissa collegata con la medesima fune a una massa m_2 appoggiata su un piano inclinato di θ sull'orizzontale e che presenta un coefficiente di attrito statico μ_s. Determinare la massa di un contrappeso da agganciare alla carrucola mobile affinché il sistema sia in equilibrio statico.*

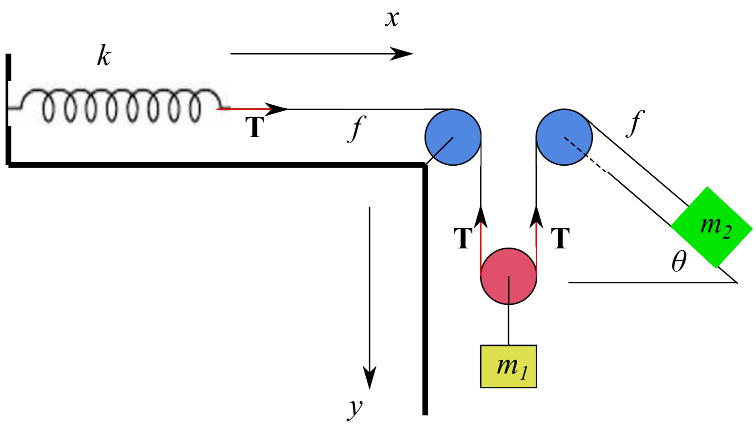

Figura 1: Esercizio 1.

Soluzione

Non dobbiamo fare altro che scrivere le condizioni di equilibrio per i singoli componenti del sistema. Iniziamo con la molla. Dopo aver orientato un asse x orizzontale verso destra, si ha:

$$\mathbf{T} + \mathbf{F}_e = \mathbf{0}$$

dove $\mathbf{T}$ è la tensione della fune, mentre $\mathbf{F}_e$ è la forza elastica di richiamo. Per un allungamento x, l'equazione precedente proiettata sull'asse x, porge

$$T - kx = 0 \tag{1}$$

Passiamo al contrappeso di massa m_1 (incognita). Dopo aver orientato un asse y verticale verso il basso e ricordando che per una fune priva di massa, $T = |\mathbf{T}|$ si conserva lungo la fune medesima, si ha:

$$m_1\mathbf{g} + 2\mathbf{T} = 0 \Longleftrightarrow m_1 g - 2T = 0 \tag{2}$$

Per scrivere l'equazione del moto per la massa m_2, conviene assegnare un sistema di assi cartesiani $\xi\eta$ come in fig. 2.

Deve essere

$$\mathbf{T} + \mathbf{R}_N + \mathbf{R}_T + m_2\mathbf{g} = \mathbf{0} \tag{3}$$

dove $\mathbf{R}_N, \mathbf{R}_T$ sono rispettivamente la reazione normale e la reazione tangenziale del vincolo (quest'ultima è dovuta all'attrito). Proiettando la (3) sui predetti assi $\xi\eta$, si ottiene:

$$\begin{cases} -T + R_T + m_2 g \sin\theta = 0 \\ R_N - m_2 g \cos\theta = 0 \end{cases}$$

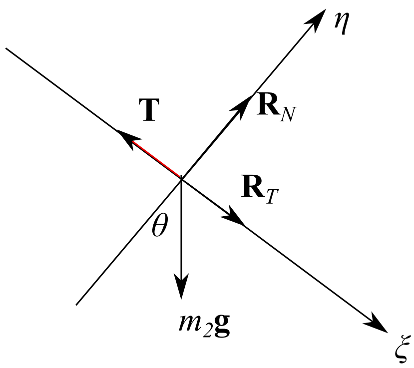

Figura 2: Esercizio 1.

Dalla seconda $R_N = m_2 g \cos\theta$; siccome $R_T = \mu_s R_N$, si ha:

$$-T + \mu_s m_2 g \cos\theta + m_2 g \sin\theta = 0 \tag{4}$$

Le (1)-(2)-(4) costituiscono un sistema di tre equazioni lineari nelle tre incognite x, T, μ_s:

$$\begin{cases} -T + kx + 0 = 0 \\ 2T + 0 + 0 = m_1 g \\ -T + 0 + \mu_s m_2 g \cos\theta = -m_2 g \sin\theta \end{cases}$$

Calcoliamo μ_s:

$$\mu_s = \frac{\begin{vmatrix} 0 & k & 0 \\ m_1 g & 0 & 0 \\ -m_2 g \sin\theta & 0 & m_2 g \cos\theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & k & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & m_2 g \cos\theta \end{vmatrix}} = \frac{m_1}{2m_2 \cos\theta} - \tan\theta,$$

da cui ricaviamo la massa del contrappeso:

$$m_1 = 2m_2 \left(\mu_s \cos\theta + \sin\theta\right) \tag{5}$$