Carrucola fissa

Marcello Colozzo http://extrabyte.infohttp://extrabyte.info

Esercizio 1 *Il sistema meccanico di fig. 1 è costituito da due blocchi A e B di massa m_1 e m_2 rispettivamente, collegati da una fune ideale f che passa per la gola di una puleggia ideale P.*

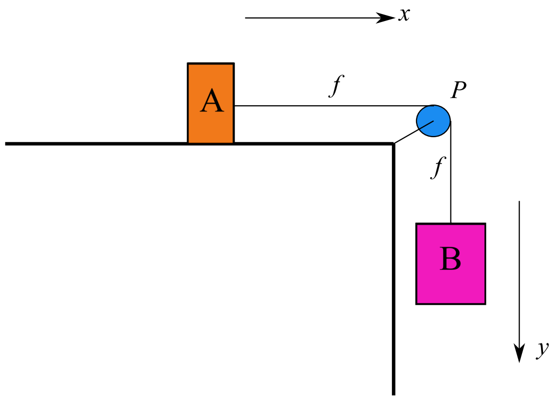

Figura 1: Esercizio 1.

1. *Supponendo che il piano orizzontale su cui poggia A sia privo di attrito, studiare il modo di A e B, assumendo come parametri liberi le rispettive masse inerziali. Studiare i casi limiti $m_1 \gg m_2$, $m_1 \ll m_2$, e il caso particolare $m_1 = m_2$.*

2. *Quale deve essere il coefficiente di attrito del piano orizzontale affinchè il sistema rimanga in equilibrio dinamico?*

Soluzione
Quesito 1
Per il moto di B assumiamo un asse y verticale orientato verso il basso (fig. 1):

$$\mathbf{T} + m_2\mathbf{g} = m_2\mathbf{a} \Longleftrightarrow -T + m_2 g = m_2 a \tag{1}$$

Per il moto di A assumiamo un asse x orizzontale orientato verso destra:

$$\mathbf{R}_N + m_2\mathbf{g} + \mathbf{T} = m_2\mathbf{a} \tag{2}$$

dove $\mathbf{R}_N$ è la reazione normale del vincolo:

$$\mathbf{R}_N = -m_2\mathbf{g}$$

per cui la precedente diviene

$$T = m_2 a \tag{3}$$

Si noti che il modulo dell'accelerazione è la stessa per A e B, in virtù dell'idealità della fune f. Più precisamente, l'inestensibilità implica la conservazione del modulo dell'accelerazione (la direzione cambia per la presenza della puleggia). Anche la tensione è la stessa, giacché la fune è di massa trascurabile. Mettendo a sistema le (1)-(3) otteniamo la predetta accelerazione:

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g$$

Introducendo il parametro adimensionale non negativo

$$\xi = \frac{m_1}{m_2},$$

si ha il modulo dell'accelerazione in funzione di ξ:

$$a(\xi) = \frac{1}{\xi + 1} g$$

Segue

$$m_2 \gg m_1 \Longrightarrow \xi \ll 1 \Longrightarrow a \simeq g \tag{4}$$

Cioè se la massa di A è trascurabilmente piccola rispetto a quella di B, quest'ultimo è approssimativamente in caduta libera. Nel limite opposto

$$m_2 \ll m_1 \Longrightarrow \xi \gg 1 \Longrightarrow a \simeq 0 \tag{5}$$

Cioè, se la massa di B è trascurabilmente piccola rispetto a quella di A, il sistema è approssimativamente in equilibrio dinamico. Infine

$$m_1 = m_2 \Longrightarrow a = \frac{g}{2} \tag{6}$$

In fig. riportiamo il grafico di a/g in funzione di ξ.

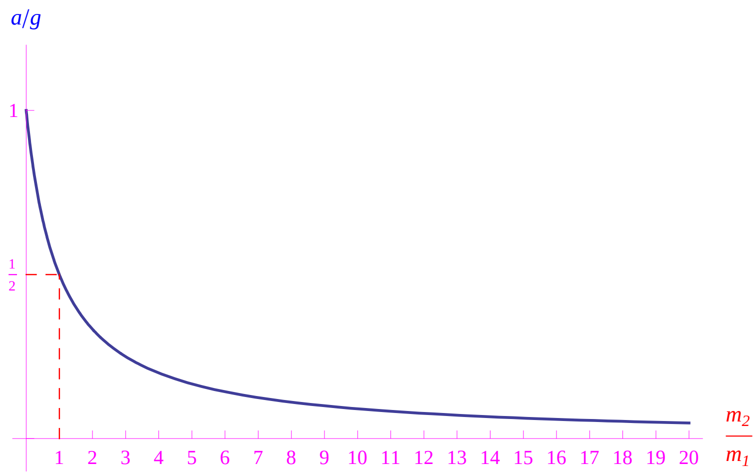

Figura 2: Esercizio 1.

Quesito 2

Il diagramma delle forze agenti su B è ovviamente inalterato, per cui l'equazione del moto di B è

$$T = m_2 g - m_2 a \tag{7}$$

Per B invece, troviamo oltre alla consueta reazione normale del vincolo, una reazione tangenziale $\mathbf{R}_T$ dovuta all'attrito e che si oppone al moto:

$$T - R_T = m_1 a \underset{R_T = \mu m_2 g}{\Longrightarrow} T = \mu m_2 g + m_2 a \tag{8}$$

Eliminando T tra le equazioni appena ottenute:

$$a = \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2} g$$

Si noti che per $\mu = 0$ otteniamo (ovviamente) l'equazione trovata nel quesito 1. Per $\mu > 0$ l'accelerazione è minore ed è proprio ciò che ci si aspetta a causa dell'attrito. L'esercizio chiede il valore di μ affinchè il sistema rimanga in equilibrio dinamico:

$$a = 0 \Longleftrightarrow m_2 - \mu m_1,$$

da cui

$$\mu = \frac{m_2}{m_1}$$

Rammentando che $\mu \in [0, 1)$ si ha che deve essere $m_2 < m_1$.

Esercizio 2