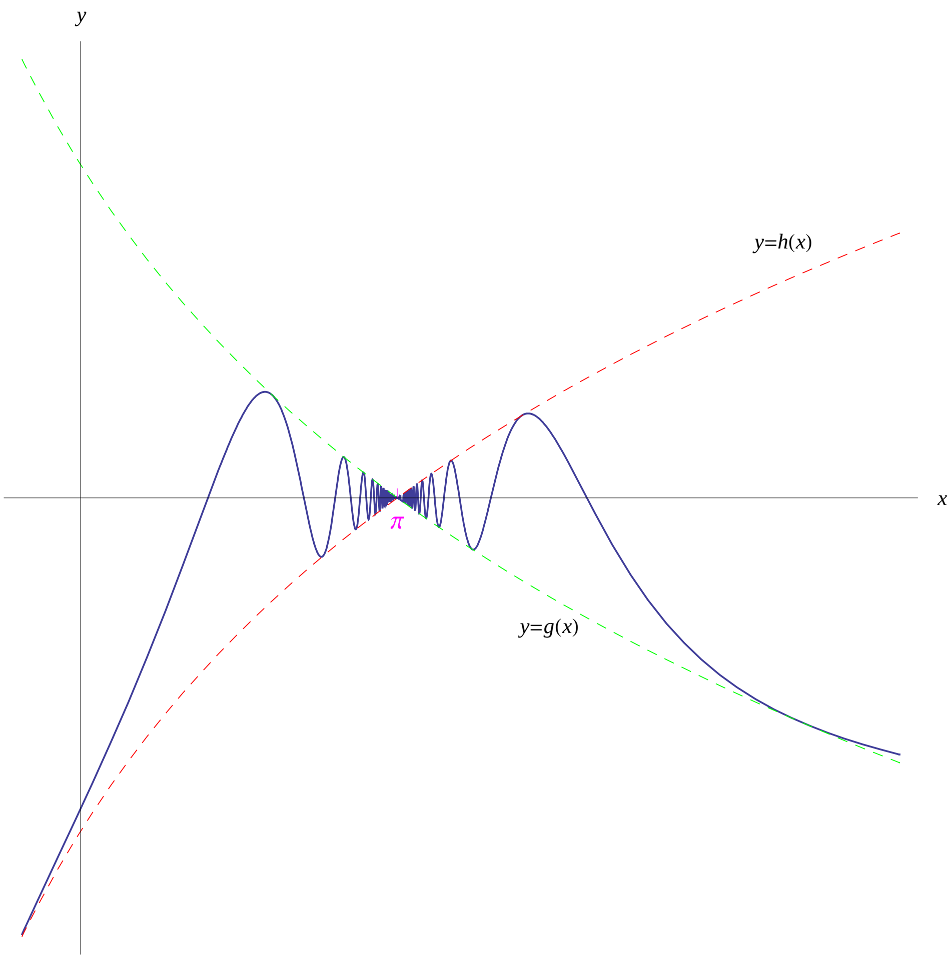
Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_{\Gamma} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

# Esperimenti computazionali con Mathematica: il Teorema dei Carabinieri

**Marcello Colozzo**



**Criterio 1** ***Teorema dei carabinieri***
*Siano $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ definite in $X \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathcal{D}(X)$.*

- ***Ipotesi***

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l \in \mathbb{R}$$
$$\exists I(x_0) \mid x \in X \cap I(x_0) - \{x_0\} \Longrightarrow g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

- ***Tesi***

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

**Dimostrazione.** $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l \in \mathbb{R} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \Big(\forall J_\varepsilon(l), \exists I_{\delta_\varepsilon^{(1)}}(x_0), \ \exists I_{\delta_\varepsilon^{(2)}}(x_0) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon^{(1)}}(x_0) \cap I_{\delta_\varepsilon^{(2)}}(x_0) - \{x_0\} \Longrightarrow g(x), h(x) \in J_\varepsilon(l)$
Per ipotesi:

$$\exists I(x_0) \mid x \in X \cap I(x_0) - \{x_0\} \Longrightarrow f(x) \in [g(x), h(x)]$$

Consideriamo il seguente intorno di $x_0$:

$$I_{\Delta_\varepsilon}(x_0) = I(x_0) \cap I_{\delta_\varepsilon^{(1)}}(x_0) \cap I_{\delta_\varepsilon^{(2)}}(x_0) = (x_0 - \Delta_\varepsilon, x_0 + \Delta_\varepsilon),$$

onde:

$$x \in X \cap I_{\Delta_\varepsilon}(x_0) - \{x_0\} \Longrightarrow g(x), h(x) \in J_\varepsilon(l) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow J_\varepsilon(l) \supseteq [g(x), h(x)] \ni f(x)$$

Cioè:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

■

Il teorema conserva la propria validità anche nel caso di divergenza. Ad esempio:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = +\infty$$
$$\exists I(x_0) \mid x \in X \cap I(x_0) - \{x_0\} \Longrightarrow g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

Implica:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

**Esempio 2** *Assegnata la funzione:*

$$f(x) = x \cos\left(\frac{1}{\ln|x|}\right), \tag{1}$$

*dimostriamo che è infinitesima in $x_0 = 0$.*
***Svolgimento***
*Osserviamo innanzitutto che la funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \{1\}$. Inoltre:*

$$|f(x)| = \left|x \cos\left(\frac{1}{\ln|x|}\right)\right| = |x| \underbrace{\left|\cos\left(\frac{1}{\ln|x|}\right)\right|}_{\leq 1} \leq |x|$$

*Cioè*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x), \quad \forall x \in X,$$

*dove*

$$g(x) = -x, \quad h(x) = x,$$

*riuscendo manifestamente:*

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} h(x) = 0,$$

*onde per il teorema dei caribinieri:*

$$\lim_{x \to 0} x \cos\left(\frac{1}{\ln|x|}\right) = 0,$$

*come illustrato in fig. 1.*

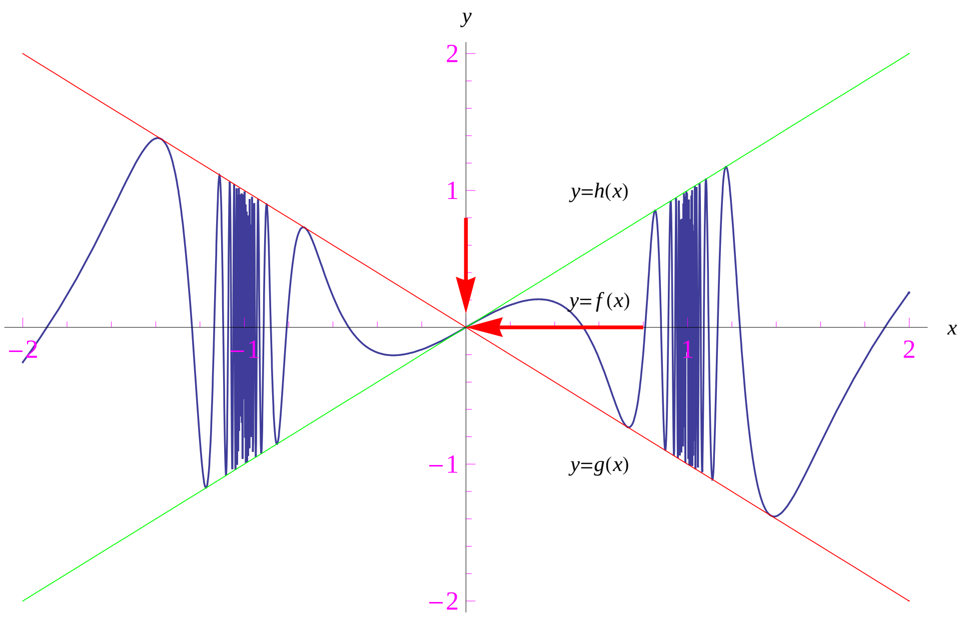



Figura 1: Applicazione del teorema dei carabinieri all'esempio 2.

*Il codice Mathematica per la generazione del grafico di fig.1 può essere prelevato da questa risorsa online.*

**Esempio 3** *Calcoliamo il limite*

$$\lim_{x \to \pi} \sin\left(\frac{1}{\sin x}\right) \ln|x - \pi + 1| \tag{2}$$

*Posto*

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{\sin x}\right) \ln|x - \pi + 1|, \tag{3}$$

*vediamo che tale funzione non è definita in $\pi$. Più precisamente, l'insieme di definizione è:*

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi - 1, \ x \neq k\pi, \ \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

*Inoltre:*

$$|f(x)| = \left|\sin\left(\frac{1}{\sin x}\right)\ln|x-\pi+1|\right| = \left|\sin\left(\frac{1}{\sin x}\right)\right| \left|\ln|x-\pi+1|\right|,$$

*da cui:*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x), \quad \forall x \in X, \tag{4}$$

*essendo:*

$$g(x) = -\ln|x-\pi+1|, \quad h(x) = \ln|x-\pi+1|$$

*Riesce:*

$$\lim_{x\to\pi} g(x) = \lim_{x\to\pi} h(x) = 0,$$

*onde per il teorema dei carabinieri:*

$$\lim_{x\to\pi}\sin\left(\frac{1}{\sin x}\right)\ln|x-\pi+1| = 0$$

*Il diagramma cartesiano $\Gamma$ della funzione $f(x)$ è riportato in fig. 2 da cui vediamo che in ogni intorno di raggio comunque piccolo di $x_0 = \pi$, il diagramma compie infinite oscillazioni che si smorzano per $x \to \pi$.*

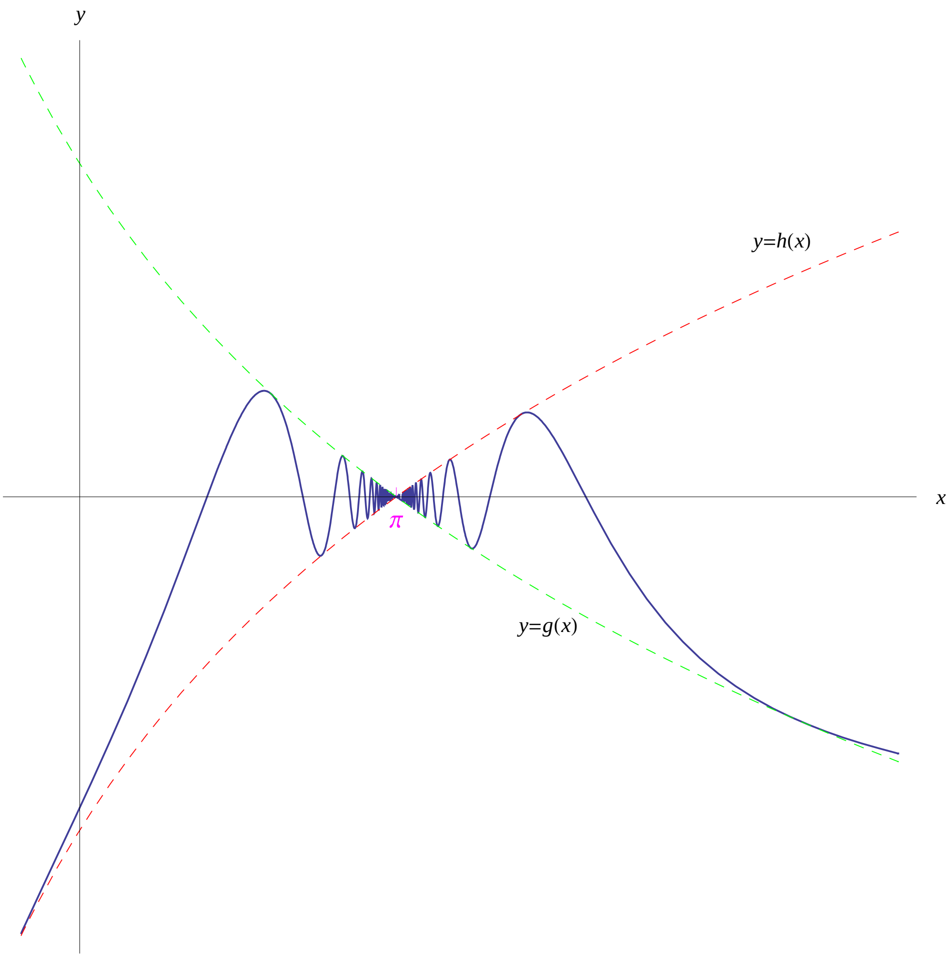



Figura 2: Applicazione del teorema dei carabinieri per calcolare il limite (2).

*Il codice Mathematica per la generazione del grafico di fig.1 può essere prelevato da questa risorsa online.*