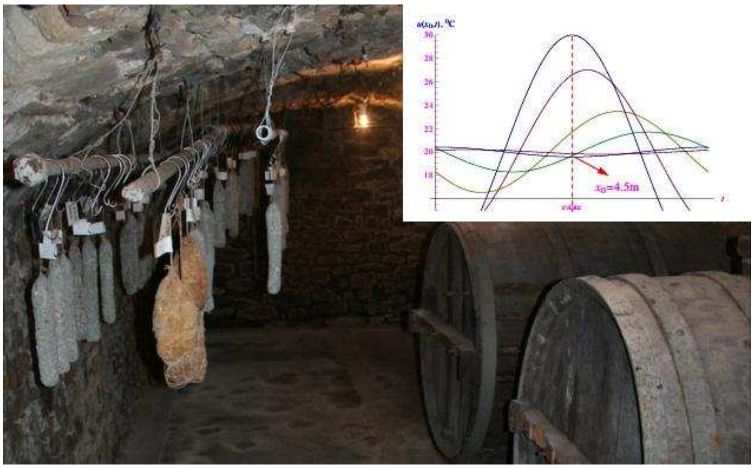
Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_{\Gamma} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

Ottimizzazione termica di una cantina

Marcello Colozzo



Indice

Capitolo 1

Trasmissione del calore

1.1 Equazione di conduzione del calore

Definizione 1 *Il* **coefficiente di diffusione** *(o* **diffusività***) di un corpo C di densità ρ e calore specifico σ, è:*

$$K = \frac{k}{\sigma \rho}, \tag{1.1}$$

essendo k la capacità termica di C.

La temperatura di C è una funzione u delle coordinate (x, y, z) del generico punto di C, e del tempo t. Cioè

$$\begin{aligned} u &: A \times [0, +\infty) \to \mathbb{R} \\ u &: (x, y, z, t) \to u(x, y, z, t), \end{aligned} \tag{1.2}$$

dove t è il tempo. In parole povere, ci aspettiamo che la temperatura di C vari punto per punto nel dominio A occupato da C, e in funzione del tempo (*campo scalare di temperatura*). La predetta funzione soddisfa la seguente equazione differenziale alle derivate parziali:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \nabla^2 u \tag{1.3}$$

Nella ricerca delle soluzioni della (1.3) si ritiene $K =$costante> 0, cioè si assume C omogeneo ed isotropo. Inoltre, si assegna una condizione iniziale del tipo

$$u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z), \quad \forall (x, y, z) \in A, \tag{1.4}$$

dove $u_0(x, y, z)$ è una funzione nota. Altre condizioni sono le cosiddette *condizioni al contorno*:

$$u(x, y, z, t) = u_1(x, y, z, t), \quad \forall (x, y, z) \in \partial A, \tag{1.5}$$

dove $u_1(x, y, z, t)$ è una funzione nota. In altri termini, le condizioni al contorno ci dicono come varia la temperatura sulla superficie di C (i.e. sulla frontiera di A). Un caso tipico è quello in cui C è in contatto con un termostato:

$$u(x, y, z, t) = u_1(x, y, z), \quad \forall (x, y, z) \in \partial A, \tag{1.6}$$

giacché in ogni punto $P \in \partial A$ la temperatura è indipendente dal tempo. Un'altra tipica condizione al contorno è quella in cui sulla superficie del corpo la temperatura è una funzione periodica del tempo di periodo T:

$$u(x,y,z,t) = u_1(x,y,z,t), \quad \forall (x,y,z) \in \partial A$$

dove

$$u_1(x_0,y_0,z_0,t+T) = u_1(x_0,y_0,z_0,t), \quad \forall (x_0,y_0,z_0) \in \partial A$$

In questo caso l'equazione di conduzione può essere risolta ricorrendo alla serie di Fourier che ben si presta nei problemi unidimensionali.

1.2 Conduzione unidimensionale

1.2.1 Generalità

Consideriamo il caso in cui il corpo C sia un *conduttore termico lineare*, cioè rappresentabile da un segmento di estremi P e Q. Orientando un asse x per i predetti punti nel verso per il quale P precede Q, si ha nelle notazioni del paragrafo precedente:

$$A = [a,b] \subseteq \mathbb{R},$$

dove a, b sono le coordinate di P e Q rispettivamente, nel predetto riferimento cartesiano $R(Ox)$. L'equazione (1.3) assume la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.7}$$

essendo $u(x,t)$ il campo di temperatura lungo C. Se quest'ultimo non è infinitamente esteso, si ha $a, b \in \mathbb{R}$, onde

$$\partial A = \{a, b\}$$

e le condizioni al contorno per la (1.7) si scrivono:

$$u(a,t) = u_0(t), \ u(b,t) = u_1(t), \tag{1.8}$$

dove $u_0(t)$ e $u_1(t)$ sono funzioni assegnate. Per una ragione che apparirà chiara nel prossimo paragrafo, è interessante il caso

$$A = [0, +\infty),$$

corrispondente a un conduttore C infinitamente esteso. Dal momento che il campo di temperatura si annulla all'infinito nelle coordinate spaziali, le precedenti condizioni al contorno si riscrivono:

$$u(a,t) = u_0(t), \ \lim_{x \to +\infty} u(x,t) = 0, \quad \forall t \in [0, +\infty) \tag{1.9}$$

Se si è interessati alla sola soluzione di regime, non occorre fissare una condizione iniziale per la (1.7).

1.2.2 Il metodo di Fourier. Impostazioni

Esaminiamo il caso in cui $u_0(t)$ sia una funzione periodica di periodo T:

$$u_0(t+T) \equiv u_0(t)$$

E se $u_0(t)$ verifica le condizioni di Dirichlet, possiamo eseguire uno sviluppo in serie di Fourier:

$$u_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega n t}, \tag{1.10}$$

dove $\omega = \frac{2\pi}{T}$, mentre i coefficienti di Fourier sono dati dalla nota relazione:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T u_0(t) e^{-i\omega n t} dt \tag{1.11}$$

Imponiamo che

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(x) e^{i\omega n t} \tag{1.12}$$

sia soluzione della (1.7), supponendo che la serie a secondo membro della (1.12) sia derivabile termine a termine, onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{d^2 u_n}{dx^2} e^{i\omega n t}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i\omega u_n(x) e^{i\omega n t}, \tag{1.13}$$

che inserite nella (1.7) restituiscono

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} i\omega u_n(x) e^{i\omega n t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} K \frac{d^2 u_n}{dx^2} e^{i\omega n t}$$

Cioè

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(K\frac{d^2 u_n}{dx^2} - i\omega u_n \right) e^{i\omega n t} = 0, \tag{1.14}$$

ovvero la serie di Fourier della funzione

$$v(x,t) = 0, \quad \forall x \in [0,+\infty), \ \forall t \in [0,+\infty),$$

i cui coefficienti di Fourier sono tutti nulli:

$$K\frac{d^2 u_n}{dx^2} - i\omega u_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

In altri termini, le infinite funzioni $u_n(x)$ che compaiono nello sviluppo in serie (1.12) risolvono la seguente equazione differenziale ordinaria

$$\frac{d^2 u_n}{dx^2} - \frac{i\omega n}{K} u_n = 0 \tag{1.15}$$

Abbiamo, quindi, ricondotto il problema dell'integrazione di un'equazione differenziale alle derivate parziali al problema dell'integrazione di un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine.

1.2.3 Ricerca delle soluzioni

Dobbiamo quindi integrare la (1.15) che qui riscriviamo:

$$\frac{d^2 u_n}{dx^2} - \frac{i\omega n}{K} u_n = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{1.16}$$

Si tratta di un'equazione differenziale del secondo ordine omogenea e a coefficienti costanti, per cui applichiamo il procedimento standard per la ricerca dell'integrale generale. Precisamente, l'equazione caratteristica è:

$$\lambda^2 - \frac{i\omega n}{K} = 0, \tag{1.17}$$

le cui radici sono:

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{i\omega n}{K}} \tag{1.18}$$

Ne consegue che l'integrale generale della (1.16) è:

$$u_n(x,t) = C_n e^{\sqrt{\frac{i\omega n}{K}}x} + D_n e^{-\sqrt{\frac{i\omega n}{K}}x}, \tag{1.19}$$

dove C_n, D_n sono costanti arbitrarie. Dal momento che n è un intero relativo, conviene distinguere i due casi: $n \geq 0$ e $n < 0$. Nel primo caso, tenendo conto dell'formula di Eulero

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,$$

onde

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{i\omega n}{K}} &= \sqrt{\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}\omega n}{K}} = e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\omega n}{K}} \\ &= \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{\omega n}{K}} \\ &= (1+i)\sqrt{\frac{\omega n}{2K}} \end{aligned}$$

Quindi

$$u_{n\geq 0}(x) = C_n e^{(1+i)\sqrt{\frac{\omega n}{2K}}x} + D_n e^{-(1+i)\sqrt{\frac{\omega n}{2K}}x}$$

Deve essere

$$\lim_{x\to+\infty} u_{n\geq 0}(x) = 0 \Longrightarrow C_n = 0,$$

per cui

$$u_{n\geq 0}(x) = D_n e^{-\sqrt{\frac{\omega n}{2K}}x} e^{-i\sqrt{\frac{\omega n}{2K}}x} \tag{1.20}$$

Passiamo al caso $n < 0$:

$$n = -|n| \Longrightarrow \sqrt{\frac{i\omega n}{K}} = \sqrt{\frac{-i\omega |n|}{K}}$$

Ma

$$-i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = e^{i\frac{3\pi}{2}},$$

onde

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{-i\omega\left|n\right|}{K}} &= e^{i\frac{3\pi}{4}}\sqrt{\frac{\omega\left|n\right|}{K}} \\ &= (i-1)\sqrt{\frac{\omega\left|n\right|}{2K}},\end{aligned}$$

cosicché

$$\begin{aligned}u_{n<0}\left(x\right) = C_n' e^{(i-1)\sqrt{\frac{\omega|n|}{2K}}} + D_n' e^{(1-i)\sqrt{\frac{\omega|n|}{2K}}} \underset{\lim_{x\to+\infty} u_{n<0}(x)=0}{=} 0 \Longrightarrow \\ \Longrightarrow u_{n<0}\left(x\right) = C_n' e^{(i-1)\sqrt{\frac{\omega|n|}{2K}}} = C_n' e^{-\sqrt{\frac{\omega|n|}{2K}}x} e^{i\sqrt{\frac{\omega|n|}{2K}}x}\end{aligned}$$

Riassumendo:

$$u_n\left(x\right) = \begin{cases} D_n e^{-\sqrt{\frac{\omega n}{2K}}x} e^{-i\sqrt{\frac{\omega n}{2K}}x}, & \text{se } n \geq 0 \\ C_n' e^{-\sqrt{\frac{\omega|n|}{2K}}x} e^{i\sqrt{\frac{\omega|n|}{2K}}x}, & \text{se } n < 0 \end{cases} \tag{1.21}$$

Rammentiamo che deve essere

$$\begin{aligned}u_0\left(t\right) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega n t}; \quad c_n = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} u_0\left(t\right) e^{-i\omega t} dt \\ u\left(x,t\right) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n\left(x\right) e^{i\omega n t}; \quad u\left(0,t\right) = u_0\left(t\right),\end{aligned}$$

onde

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n\left(0\right) e^{i\omega n t} \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega n t} \Longrightarrow c_n = u_n\left(0\right), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Finalmente la soluzione a tutti i tempi e in ogni punto dell'asse x:

$$\begin{aligned}u\left(x,t\right) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{-\sqrt{\frac{\omega|n|}{2K}}x} e^{i\left(\sqrt{\frac{\omega|n|}{2K}}x+\omega n t\right)} + \\ + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{-\sqrt{\frac{\omega n}{2K}}x} e^{i\left(-\sqrt{\frac{\omega n}{2K}}x+\omega n t\right)}\end{aligned} \tag{1.22}$$

Per graficare l'andamento in funzione del tempo per un assegnato x, dobbiamo assegnare il profilo iniziale. Ad esempio:

$$u_0\left(t\right) = 10\left[1 + 2\sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)\right], \tag{1.23}$$

dove per una ragione che apparirà chiara nel prossimo paragrafo è

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad T = 365 \text{ giorni} = 3.15 \cdot 10^7 \,\text{s}$$

Assumiamo come coefficiente K, un valore tipico:

$$K = 2 \cdot 10^{-3}\,\text{cm}^2\,/\,\text{s}$$

Tronchiamo lo sviluppo in serie trovato in precedenza, a un ordine N:

$$u\left(x,t\right)=\sum_{n=-\infty}^{-N}c_n e^{-\sqrt{\frac{\omega|n|}{2K}}x}e^{i\left(\sqrt{\frac{\omega|n|}{2K}}x+\omega nt\right)}+ \\ +\sum_{n=0}^{N}c_n e^{-\sqrt{\frac{\omega n}{2K}}x}e^{i\left(-\sqrt{\frac{\omega n}{2K}}x+\omega nt\right)} \tag{1.24}$$

Graficando tale grandezza in funzione del tempo per diversi valori di x, si scopre che l'onda termica oltre ad essere smorzata è in opposizione di fase a $x = 4.5\,\mathrm{m}$, come illustrato in fig. 1.1

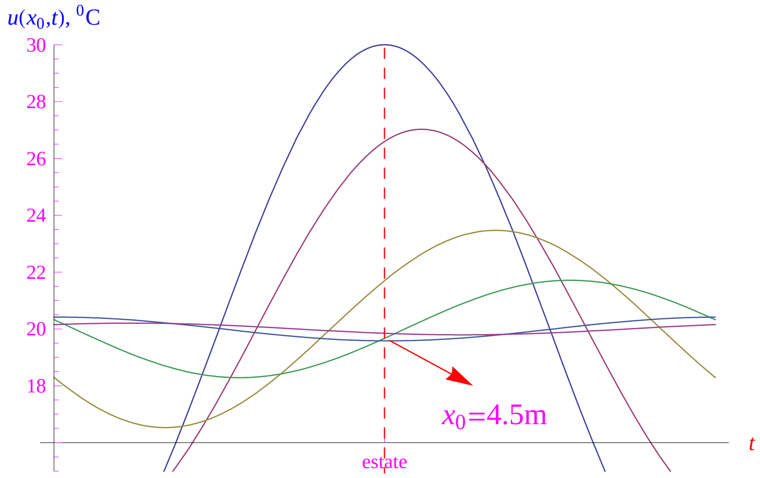


Figura 1.1: Andamento della funzione (1.24) per diversi valori dell'ascissa x.