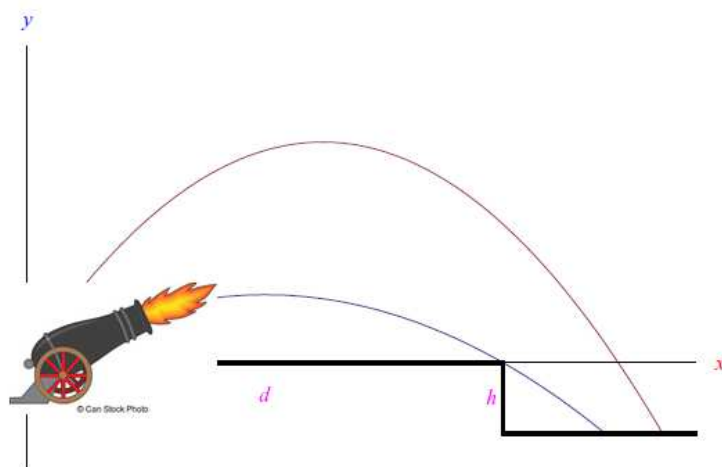


Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x) dx \quad \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

Distruzione di obiettivi bellici

Marcello Colozzo



Esercizio 1 (Testo tratto da *Problemi di Fisica generale*. La soluzione è nostra).

Un cannone è posto a distanza $d = 800$ m sull'orlo di un precipizio di altezza $h = 100$ m. Se si vogliono proteggere dal tiro del cannone alcuni obiettivi bellici posti nella vallata sottostante, a quale distanza minima dalla base del precipizio si devono porre tali obiettivi, sapendo che il cannone può imprimire una velocità iniziale $v_0 = 100$ m/s? Calcolare l'angolo di tiro col quale il cannone può colpire bersagli il più lontano possibile dalla base del precipizio. Si trascuri la resistenza dell'aria.

Soluzione

Fissiamo un sistema di assi coordinati Oxy come in fig. 1. Della famiglia di traiettorie

$$y = x \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2, \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

dobbiamo considerare tutte e sole quelle che intersecano l'asse x in punti di ascissa $x_0 \leq d$. Tenendo conto che x_0 è la gittata sull'asse x , si ha

$$x_0 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$$

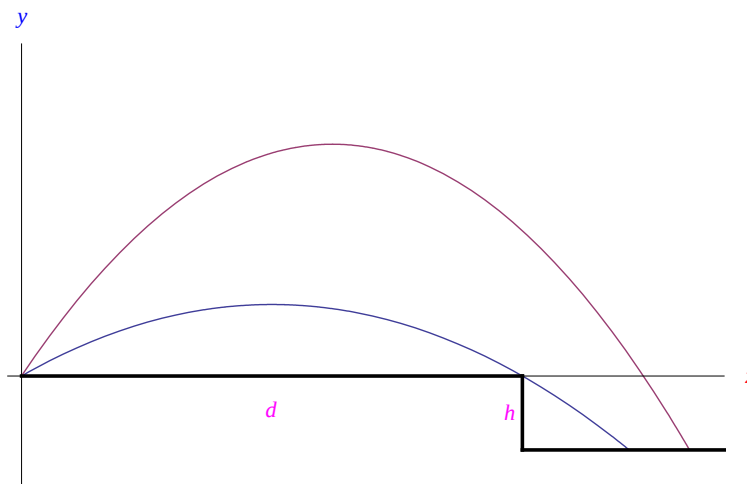


Figura 1: Esercizio 1.

Per quanto precede, dobbiamo imporre

$$x_0 \geq d \implies \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta \geq d$$

onde

$$\theta \geq \theta_{\min} = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{gd}{v_0^2} \right) = 25^\circ 49' \quad (1)$$

Quindi la sottofamiglia di traiettorie fisicamente significative è definita da:

$$y = x \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2, \quad \theta \in \left[\theta_{\min}, \frac{\pi}{2} \right) \quad (2)$$

Per determinare la massima gittata sulla base del precipizio, dobbiamo determinare innanzitutto l'ascissa del punto di intersezione A della generica traiettoria della famiglia (2) con la retta $y = -h$. Cioè, dobbiamo risolvere rispetto a x il sistema

$$\begin{cases} y = x \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 \\ y = -h \end{cases}, \quad \theta \in \left[\theta_{\min}, \frac{\pi}{2} \right)$$

Denotando con $X(\theta)$ la soluzione fisicamente significativa (l'altra radice non è fisicamente accettabile), segue che dobbiamo determinare il massimo assoluto di tale funzione nel predetto intervallo di definizione. Questo procedimento è alquanto laborioso, perchè non è facile il calcolo degli zeri della derivata $X'(\theta)$. Alternativamente, possiamo considerare la **parabola di sicurezza**:

$$\gamma_s : y = v_0^2 - \frac{g}{2v_0} x^2 \quad (3)$$

Infatti, è manifestamente $A \in \gamma_s$ per cui detto punto è raggiungibile da una sola traiettoria. Per una notevole proposizione relativa all'**angolo di sito** di un bersaglio, si ha

$$2\theta_0 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon_0, \quad (4)$$

dove θ_0 è il valore dell'angolo di tiro che stiamo cercando, mentre

$$\varepsilon_0 = \arctan \left(\frac{Y_0}{X_0} \right),$$

è l'angolo di sito di A , avendo denotato con $(X_0, Y_0 = -h)$ le sue coordinate. Imponiamo

$$A \in \gamma_s \implies -h = v_0^2 - \frac{g}{2v_0} X_0^2,$$

da cui

$$X_0 = \frac{v_0^2}{2g} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4gh}{v_0^2}} \right)$$

Il segno inferiore $(-)$ è l'ascissa di intersezione con la parabola di sicurezza nella regione $x < 0$, per cui prendiamo il segno superiore:

$$X_0 = \frac{v_0^2}{2g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4gh}{v_0^2}} \right) = 1112.16 \text{ m},$$

che è la massima gittata sulla base del precipizio. Ne segue che gli obiettivi bellici dovranno essere sistemati a una distanza minima dalla base del precipizio pari a

$$D_{\min} = X_0 - d = 312.16 \text{ m} \quad (5)$$

Per rispondere al secondo quesito, utilizziamo la (4):

$$\theta_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan \left[-\frac{2gh}{v_0^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4gh}{v_0^2}} \right)} \right] = 42^\circ 26',$$

riuscendo $\theta_0 \geq \theta_{\min}$, per cui è una soluzione accettabile.

Bibliografia

- [1] Mandò M., *Esercizi e problemi di Fisica. Volume I: Meccanica - Termologia*. Libreria universitaria, 1958.