Appunti di Meccanica Razionale.
Calcolo vettoriale

Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info

1 Prodotto scalare

Assegnati i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ il *prodotto scalare* di $\mathbf{u}$ per $\mathbf{v}$ si denota con $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ (si legge "u scalare v") ed è dato da:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = uv \cos \phi, \tag{1}$$

essendo ϕ è l'angolo ($\leq \pi$) tra i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, mentre $u = |\mathbf{u}|$ e $v = |\mathbf{v}|$, dove il simbolo $|\cdot|$ denota il modulo di un vettore. È chiaro che la componente del vettore $\mathbf{u}$ secondo la direzione orientata di $\mathbf{v}$, è $u_v = u \cos \phi$, onde:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = v u_v \tag{2}$$

Allo stesso modo $v_u = v \cos \phi$, quindi:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u v_u, \tag{3}$$

come illustrato in fig.1.

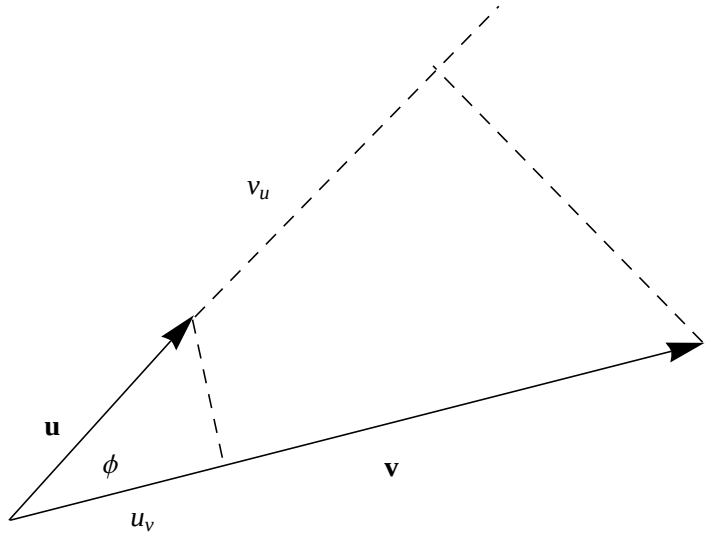

Figure 1: Prodotto scalare $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

Una ovvia conseguenza della definizione di prodotto scalare è che se $\phi = \frac{\pi}{2}$, è $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, ovvero il prodotto scalare di due vettori ortogonali è nullo.

Il prodotto scalare permette di esprimere la componente di un qualunque vettore u secondo la direzione orientata di una assegnata retta orientata r. Più precisamente, posto $\mathbf{e} = vers\,(r)$, si ha:

$$u_r = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e} \tag{4}$$

2 Terne levogire e destrogire

Siano r_1, r_2, r_3 rette orientate non complanari e denotiamo con O il punto di intersezione delle suddette rette. Sia, poi, Ω un osservatore con i piedi in O e disposto lungo la retta r_3 (nel suo verso positivo). Una qualunque retta s uscente da O e contenuta nel piano individuato dalle rette r_1 e r_2, può ruotare attorno al punto O in due versi opposti. Ciò premesso, sussiste la seguente definizione:

Definition 1 *La rotazione di s avviene in senso* **levogiro rispetto a** r_3*, se l'osservatore Ω vede ruotare s da destra verso sinistra. Nel caso contrario, la rotazione di s avviene in senso* **destrigiro rispetto a** r_3.

Definition 2 *La terna di assi $r_1 r_2 r_3$ è* **levogira***, se la retta r_1 per poter descrivere l'angolo ($\geq \frac{\pi}{2}$) Or_1r_2, ruota in senso levogiro. Nel caso contrario, la terna $r_1 r_2 r_3$ è* **levogira**.

La definizione di terna levogira/destrogira si estende ai vettori. Pertanto parlereremo di terne $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ levogire o destrogire. Due terne di vettori si dicono della stessa classe se sono entrambe levogire o entrambe destrogire. Inoltre, una classe è invariante per permutazione ciclica dei suoi elementi.

3 Prodotto vettoriale

Assegnati i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ il *prodotto vettoriale* di $\mathbf{u}$ per $\mathbf{v}$ si denota con $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ (si legge "u vettore v"). Il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale al piano contenente $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, ha verso tale che la terna $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è levogira, e modulo:

$$|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}| = uv \sin \phi, \tag{5}$$

dove ϕ è l'angolo tra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. È facile persuadersi che $|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|$ è l'area del parallelogramma $OACB$, come illustrato in fig. 2.

Il prodotto misto è anticommutativo: $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ e si annulla per $\phi = 0$, cioè quando i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono paralleli o antiparalleli.

4 Prodotto misto

Assegnati i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ il *prodotto misto* di $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ si denota con il simbolo:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w},$$

in cui è sottointeso che bisogna eseguire prima il prodotto vettoriale $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, seguito dal prodotto scalare di quest'ultimo per il vettore $\mathbf{w}$. Ne consegue che il prodotto misto è uno scalare e ha una immediata interpretazione geometrica (cfr. fig. 3). Innanzitutto, $|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}| = area\,(OADB)$. Denotiamo poi con s la retta orientata uscente da O con direzione e verso pari a quelli di $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, per cui indichiamo con w_s la componente di $\mathbf{w}$ nella direzione e verso di s. Riesce:

$$|w_s| = dist\,(C, \alpha) \stackrel{def}{=} h,$$

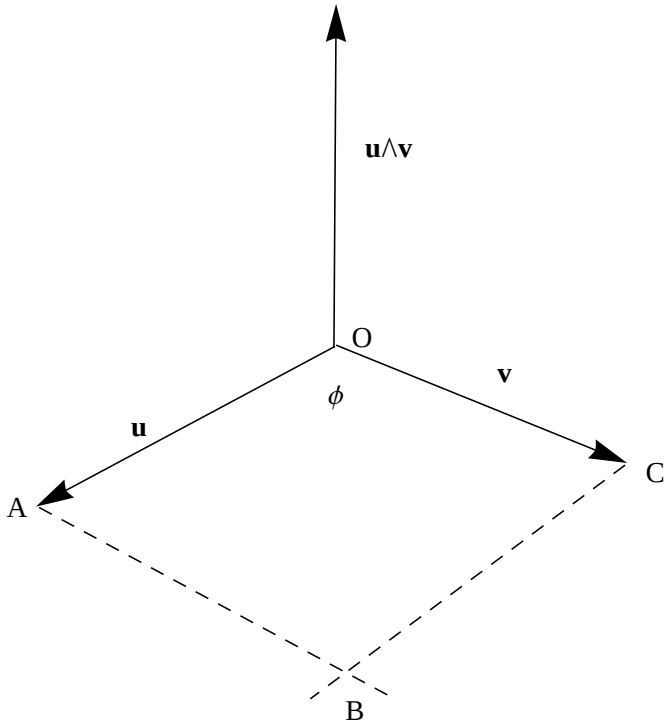

Figure 2: Prodotto vettoriale di **u** per **v**.

dove α è il piano contenente i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Riguardo al segno, se ϕ_s è l'angolo che $\mathbf{w}$ forma con $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, si ha:

$$w_s \begin{cases} \geq 0, & \text{se } 0 \leq \phi_s \leq \frac{\pi}{2} \\ < 0, & \text{se } \frac{\pi}{2} < \phi_s < \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

Cioè:

$$w_s \begin{cases} \geq 0, & \text{se la terna } (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \text{ è levogira} \\ < 0, & \text{se la terna } (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \text{ è destrogira} \end{cases}$$

È chiaro che h è l'altezza del parallelepipedo individuato dalla terna $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$. Inoltre:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}|\, w_s = area\,(OADB) \cdot h,$$

onde:

$$|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| = V,$$

essendo V il volume del parallelepipedo. Riguardo al segno:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \begin{cases} V, & \text{se la terna } (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \text{ è levogira} \\ -V, & \text{se la terna } (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \text{ è destrogira} \end{cases}$$

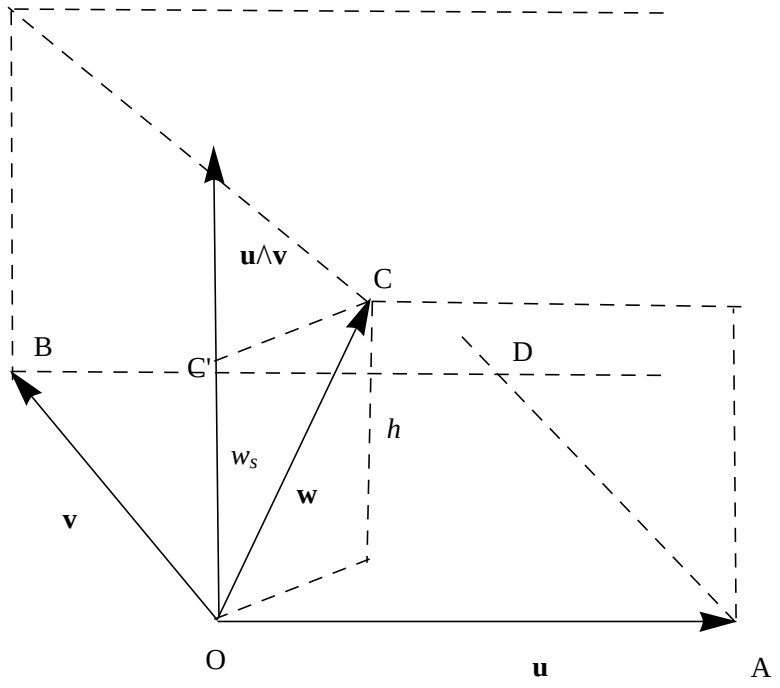

Figure 3: Prodotto misto dei vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.

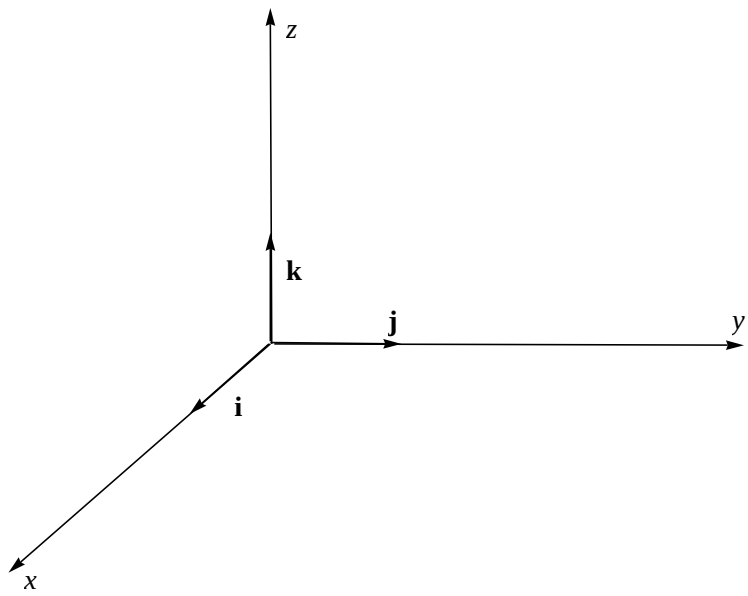

Figure 4: I versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ degli assi coordinati del riferimento cartesiano $\mathcal{R}\,(Oxyz)$.

5 Rappresentazione cartesiana dei vettori

5.1 Componenti cartesiane di un vettore

Assegnato un riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(Oxyz)$ dello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$, denotiamo con $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ i versori degli assi coordianati (cfr. fig. 4).

Dalle nozioni precedentemente acquisite, si ricavano le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{0} \\ \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}, \ \ \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i}, \ \ \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \end{cases} \tag{6}$$

Le (6) si riassumono dicendo che il sistema di vettori $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ è una *base ortonormale* di $\mathbb{R}^3$. Tale locuzione deriva dal fatto che innanzitutto tale sistema è di ordine massimo, nel senso che è linearmente indipendente e ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ si esprime come combinazione lineare dei vettori del sistema medesimo. In più, i suoi vettori sono mutuamente ortogonali e normalizzati (cioè di modulo unitario).

Per quanto precede, un qualunque vettore $\mathbf{u}$ si esprime in uno ed un sol modo come combinazione lineare di $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$:

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k} \tag{7}$$

Nella (7) la terna ordinata (u_x, u_y, u_z) definisce le *componenti cartesiane di* $\mathbf{u}$ nella base$\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Evidentemente:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \tag{8}$$

Una qualunque coppia di punti (eventualmente coincidenti) $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$, individua univocamente il vettore $\mathbf{u}$ (eventualmente nullo) di componenti cartesiane:

$$u_x = x_2 - x_1, \ \ u_y = y_2 - y_1, \ \ u_z = z_2 - z_1 \tag{9}$$

Denotiamo tale vettore con il simbolo $B - A$:

$$\mathbf{u} = B - A, \tag{10}$$

che è il vettore avente per direzione la retta per A e B ed è orientato nel verso da A a B. Si noti che la (10) è ben posta, poichè se $A = B$ è $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

5.2 Espressione cartesiana di un punto

Definition 3 *Il* **vettore posizione** *di un punto $P(x, y, z) \in R^3$ è il vettore $\mathbf{u} = P - O$. (cfr. fig. 5). Tale vettore ha per componenti cartesiane le coordinate cartesiane di P :*

$$u_x = x, \ \ u_y = y, \ \ u_z = z$$

Da tale definizione segue:

$$P - O = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z_z\mathbf{k},$$

che può essere riscritta nella forma più incisiva:

$$P = O + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z_z\mathbf{k} \tag{11}$$

La (11) è nota come *espressione cartesiana* del punto P.

5.3 Operazione sui vettori in forma cartesiana

Riassumiamo le espressioni cartesiane di alcune operazioni notevoli sui vettori.

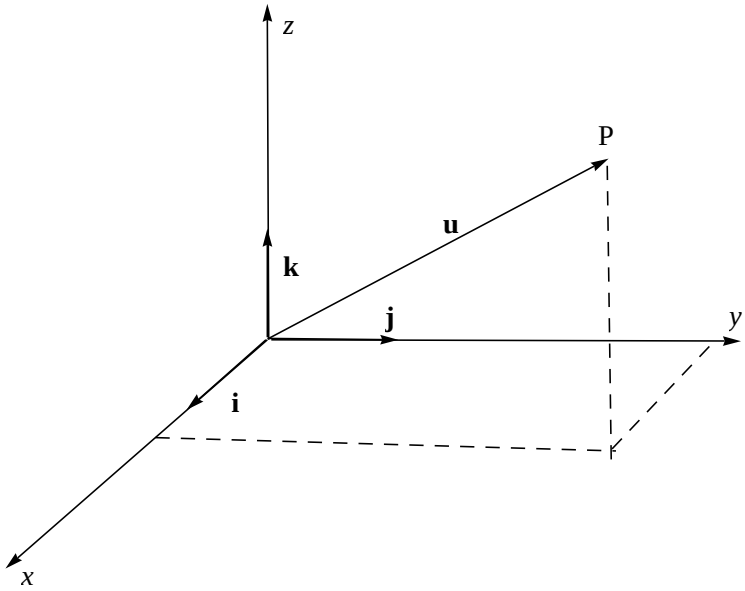

Figure 5: Vettore posizione di P.

5.3.1 Prodotto scalare

Assegnati i vettori

$$\mathbf{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \tag{12}$$

il loro prodotto scalare è:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z \tag{13}$$

La (13) ci consente di esprimere cartesianamente la componente di un vettore $\mathbf{u}$ secondo una direzione orientata r (di versore $\mathbf{e}$). Più precisamente, se i coseni direttori di r sono dati dalla terna ordinata (α, β, γ), i.e. $\mathbf{e} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$, dalla (13) segue:

$$u_r = u_x\alpha + u_y\beta + u_z\gamma \tag{14}$$

5.3.2 Prodotto vettore

Assegnati i vettori (12), il loro prodotto vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ coincide con lo sviluppo di un determinante simbolico di ordine 3. Precisamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}\left(u_y v_z - v_y u_z\right) + \mathbf{j}\left(u_z v_x - u_x v_z\right) + \mathbf{k}\left(u_x v_y - v_x u_y\right), \end{aligned} \tag{15}$$

o, ciò che è lo stesso, le componenti cartesiane di $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ sono i minori estratti dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix},$$

ottenuti cancellando la prima, la seconda e la terza colonna, e presi con segni alterni.

5.3.3 Prodotto misto

Assegnati i vettori (12) e il vettore $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)$, il prodotto misto $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ coincide con lo sviluppo di un determinante di ordine 3. Precisamente:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \tag{16}$$

6 Vettori e punti variabili

6.1 Funzioni vettoriali

6.1.1 Definizione di funzione vettoriale

Assegnato un riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(Oxyz)$ dello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$, consideriamo il vettore:

$$\mathbf{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k} \tag{17}$$

Supponiamo che le componenti cartesiane u_x, u_y, u_z siano delle funzioni reali della variabile reale definite in $X \subseteq \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &u_x : X \to \mathbb{R} \\ &u_x : t \to u_x(t), \\ &\quad etc. \end{aligned}$$

In tal modo, la (17) stabilie la legge di corrispondenza:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u} : X \to \mathbb{R}^3 \\
&\mathbf{u} : t \to (u_x(t), u_y(t), u_z(t)),
\end{aligned}$$

che è una **funzione vettoriale** della variabile reale t, onde scriviamo:

$$\mathbf{u}(t) = u_x(t)\,\mathbf{i} + u_y(t)\,\mathbf{j} + u_z(t)\,\mathbf{k} \tag{18}$$

6.1.2 Le nozioni di limite e di continuità

Alle funzioni vettoriali si estendono proprietà e definizioni che caratterizzano le ordinarie funzioni scalari che si studiano in Analisi. Una delle principali nozioni è quella di limite. Sia t_0 un punto di accumulazione (al finito o all'infinito) di X, per cui ha senso studiare il comportamento delle funzioni scalari $u_x(t), u_y(t), u_z(t)$ in un intorno di t_0. Supponiamo che le suddette funzioni siano convergenti in t_0. Cioè:

$$\lim_{t\to t_0} u_x(t) = v_{0x}, \quad \lim_{t\to t_0} u_y(t) = v_{0y}, \quad \lim_{t\to t_0} u_z(t) = v_{0z}, \tag{19}$$

con $v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} \in \mathbb{R}$ che, a loro volta, individuano il vettore:

$$\mathbf{v}_0 = v_{0x}\mathbf{i} + v_{0y}\mathbf{j} + v_{0z}\mathbf{k} \tag{20}$$

Per definizione di limite, le (19) si traducono in

$$\begin{aligned}
&\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\delta_{x,\varepsilon} > 0 \mid t \in X, \quad 0 < |t - t_0| < \delta_{x,\varepsilon} \Longrightarrow |u_x(t) - v_{0x}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \\
&\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\delta_{y,\varepsilon} > 0 \mid t \in X, \quad 0 < |t - t_0| < \delta_{y,\varepsilon} \Longrightarrow |u_y(t) - v_{0y}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \\
&\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\delta_{z,\varepsilon} > 0 \mid t \in X, \quad 0 < |t - t_0| < \delta_{z,\varepsilon} \Longrightarrow |u_z(t) - v_{0z}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}
\end{aligned} \tag{21}$$

Posto $\delta_\varepsilon = \min\{\delta_{x,\varepsilon}, \delta_{y,\varepsilon}, \delta_{z,\varepsilon}\}$, si ha:

$$\begin{aligned}
&\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\delta_\varepsilon > 0 \mid t \in X, \quad 0 < |t - t_0| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}_0| = \\
&= |[u_x(t) - v_{0x}]\,\mathbf{i} + [u_y(t) - v_{0y}]\,\mathbf{j} + [u_z(t) - v_{0z}]\,\mathbf{k}| \\
&= \sqrt{\underbrace{[u_x(t) - v_{0x}]^2}_{<\frac{\varepsilon^2}{3}} + \underbrace{[u_y(t) - v_{0y}]^2}_{<\frac{\varepsilon^2}{3}} + \underbrace{[u_z(t) - v_{0z}]^2}_{<\frac{\varepsilon^2}{3}}} < \varepsilon
\end{aligned}$$

Tale proprietà si eprime con la notazione simbolica:

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{u}(t) = \mathbf{v}_0, \tag{22}$$

e diremo che la funzione vettoriale $\mathbf{u}(t)$ è convergente in t_0. È altrettanto immediata l'estensione della nozione di continuità che, come è noto, è un caso particolare di convergenza. Più precisamente, se $t_0 \in X \cap \mathcal{D}(X)$, dove $\mathcal{D}(X)$ è il derivato di X, i.e. l'insieme dei punti di accumulazione per X, diremo che $\mathbf{u}(t)$ è continua in t_0, se e solo se sono ivi continue le funzioni scalari $u_x(t), u_y(t), u_z(t)$:

$$\lim_{t\to t_0} u_x(t) = u_x(t_0), \quad \lim_{t\to t_0} u_y(t) = u_y(t_0), \quad \lim_{t\to t_0} u_z(t) = u_z(t_0), \tag{23}$$

onde:

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t_0), \tag{24}$$

6.1.3 Derivata di una funzione vettoriale

L'operazione di passaggio al limite ci consente di introdurre la nozione di derivata di una funzione vettoriale. A tale scopo consideriamo la funzione vettoriale (18) che senza perdita di generalità supponiamo definita nell'intervallo $[a, b]$ (limitato o illimitato). Assegnato $t_0 \in [a, b]$ sia Δt un incremento di t tale che $(t_0 + \Delta t) \in [a, b]$. La grandezza vettoriale:

$$\frac{\mathbf{u}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{u}(t_0)}{\Delta t}, \tag{25}$$

si chiama rapporto incrementale relativo alla funzione vettoriale $\mathbf{u}(t)$ ed è a sua volta, una funzione vettoriale della variabile scalare t. Il punto $\Delta t = 0$ è di accumulazione per l'insieme di definizione della (25), per cui siamo interessati al suo comportamento per $\Delta t \to 0$. Se esiste finito il limite:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{u}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{u}(t_0)}{\Delta t},$$

si dice che $\mathbf{u}(t)$ è derivabile in t_0 e si scrive:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{u}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{u}(t_0)}{\Delta t} = \mathbf{u}'(t_0),$$

dove $\mathbf{u}'(t_0)$ è la derivata della funzione $\mathbf{u}(t)$ nel punto t_0. È chiaro che risulta:

$$\mathbf{u}'(t_0) = u_x'(t_0)\,\mathbf{i} + u_y'(t_0)\,\mathbf{j} + u_z'(t_0)\,\mathbf{k},$$

essendo $u_x'(t_0), u_y'(t_0), u_z'(t_0)$ le derivate delle funzioni $u_x(t), u_y(t), u_z(t)$ nel punto t_0. Abbiamo quindi stabilito il seguente risultato:

Remark 4 *La funzione vettoriale* $\mathbf{u}(t) = u_x(t)\,\mathbf{i} + u_y(t)\,\mathbf{j} + u_z(t)\,\mathbf{k}$ *è derivabile in* t_0 *se e solo se le funzioni scalari* $u_x(t), u_y(t), u_z(t)$ *sono ivi derivabili.*

Se $\mathbf{u}(t)$ è derivabile in ogni $t \in [a, b]$, diremo che è derivabile in $[a, b]$. In tal caso, è definita una nuova funzine e cioè la derivata di $\mathbf{u}(t)$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t)}{\Delta t} = \mathbf{u}'(t),$$

dove abbiamo utilizzato la notazione apicale di Lagrange. Di contro, nella notazione di Leibnitz si scrive:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

Anche le regole di derivazione si estendono la caso vettoriale:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \pm \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \pm \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{26}$$

$$\frac{d}{dt}(\lambda \mathbf{u}) = \lambda \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{27}$$

$$\frac{d}{dt}[f(t)\,\mathbf{u}] = f'(t)\,\mathbf{u} + f(t)\frac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad \text{con } f(t) \text{ funzione scalare derivabile}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{28}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{29}$$

Dalla (28) discende la regola di derivazione del quadrato di un vettore. Infatti:

$$u^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 ,$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) &= \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} \\ &= 2\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \end{aligned}$$

Per la proprietà commutativa del prodotto scalare:

$$\frac{du^2}{dt} = 2\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} \tag{30}$$

In particolare, se $\mathbf{u}$ ha modulo costante (ma è comunque variabile in direzione e verso), dalla (30) segue:

$$\frac{du^2}{dt} = 0 \Longrightarrow \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0$$

Ne consegue che la derivata di un vettore di modulo costante se non è nulla è perpendicolare al vettore medesimo.

***

Nel seguito utilizzeremo spesso la nota regola di derivazione delle funzioni composte, estesa alle funzioni vettoriali. Sia $\mathbf{u}(s)$ una funzione vettoriale della variabile reale definita nell'intervallo $[s_0, s_1]$. Se a sua volta, s è una funzione della variabile reale t, definita in $[a, b]$, si ha che $\mathbf{u}$ è una funzione composta $\mathbf{u}[s(t)]$. Se poi le funzioni $\mathbf{u}(s)$ e $s(t)$ sono derivabili nei rispettivi insiemi di definizione, segue che $\mathbf{u}[s(t)]$ è derivabile e la sua derivata è data da:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u}[s(t)] = \mathbf{u}'(s)\, s'(t) \tag{31}$$

Utilizzando la notazione di Leibniz l'equazione precedente si scrive:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{ds}\frac{ds}{dt} \tag{32}$$

Le (31)-(32) forniscono la *regola di derivazione delle funzioni composte* nel caso in cui la componente esterna è una funzione vettoriale di una variabile reale. Dalla (32) vediamo che i vettori $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ e $\frac{d\mathbf{u}}{ds}$ sono paralleli, in quanto proporzionali con fattore di proporzionalità $\frac{ds}{dt}$, $\forall t \in [a, b]$.

6.1.4 Differenziale di una funzione vettoriale

Sia $\mathbf{u}(t)$ una funzione vettoriale definita in $[a, b]$ ed ivi derivabile. Poniamo per definizione:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t) \overset{def}{=} \frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} - \mathbf{u}'(t) \tag{33}$$

Per un assegnato $t \in [a, b]$, $\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)$ è una funzione vettoriale della variabile reale Δt, ed è manifestamente un infinitesimo per $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t) = \mathbf{0}$$

In tal modo il rapporto incrementale relativo a $\mathbf{u}(t)$ si scrive:

$$\frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} = \mathbf{u}'(t) + \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)$$

Sia

$$\mathbf{h}(\Delta t) \stackrel{def}{=} \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t)\,\Delta t \tag{34}$$

Riesce:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{h}(\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta t) = \mathbf{0}$$

Ne consegue che assumendo (per $\Delta t \to 0$) la funzione scalare $\alpha(\Delta t) = \Delta t$ come infinitesimo campione, la funzione vettoriale (34) è un infinitesimo di ordine superiore. Tenendo conto della (33):

$$\mathbf{h}(\Delta t) = \Delta \mathbf{u} - \mathbf{u}'(t)\,\Delta t,$$

per cui la differenza $\Delta \mathbf{u} - \mathbf{u}'(t)\,\Delta t$ è (per $\Delta t \to 0$) un infinitesimo di ordine superiore rispetto a Δt. La funzione vettoriale lineare di Δt:

$$\mathbf{u}'(t)\,\Delta t,$$

si dice **differenziale** di $\mathbf{u}(t)$ e si indica con $d\mathbf{u}$. Cioè:

$$d\mathbf{u} = \mathbf{u}'(t)\,\Delta t$$

D'altra parte $\Delta t = dt$, onde:

$$d\mathbf{u} = \mathbf{u}'(t)\,dt$$

6.1.5 Derivata di un punto variabile

Assegnato un riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(Oxyz)$ dello spazio ordinario $\mathbb{R}^3$, consideriamo un punto P le cui coordinate cartesiane siano funzioni di una variabile reale t, definita nell'intervallo (limitato o illimitato) $[t_1, t_2]$. Cioè:

$$x = x(t)\,, \quad y = y(t)\,, \quad z = z(t)\,, \qquad t \in [t_1, t_2] \tag{35}$$

È chiaro che le (35) compongono una rappresentazione parametrica di una curva γ di $\mathbb{R}^3$. La variabile reale t svolge il ruolo di *parametro* della rappresentazione, mentre $[t_1, t_2]$ ne è l'*intervallo base*.

Se le funzioni $x(t), y(t), z(t)$ sono continue in $[t_1, t_2]$, la curva γ si dice *continua*, nel senso che risulta essere priva di interruzioni. In maniera del tutto equivalente, possiamo riferirci al *punto variabile*, scrivendo:

$$P = P(t)\,, \tag{36}$$

essendo $P(t)\,[x(t), y(t), z(t)]\,, \ \forall t \in [t_1, t_2]$. Cioè la (36) è la funzione vettoriale:

$$P(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}, \tag{37}$$

ovvero il vettore posizione di P al variare di t in $[t_1, t_2]$. È consuetudine affermare che le funzioni scalari $x(t), y(t), z(t)$ si ottengono proiettando la (37) sugli assi coordinati. Assegnato $t_0 \in [t_1, t_2]$, diamo un incremento Δt tale che $(t_0 + \Delta t) \in [t_1, t_2]$. Scriviamo quindi $P_0 = P(t_0)$, cioè $P_0\,[x(t_0), y(t_0), z(t_0)]$ e $(P + \Delta P) \equiv P(t_0 + \Delta t)\,[x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t), z(t_0 + \Delta t)]$. Il rapporto incrementale relativo a $P(t)$ si scrive:

$$\frac{P(t_0 + \Delta t) - P(t_0)}{\Delta t}, \tag{38}$$

ed è il vettore $P - P_0$, cioè il vettore avente per direzione la retta secante a γ passante per $P(t_0)$ e $P(t_0 + \Delta t)$. Tale vettore è una funzione vettoriale della variabile reale Δt. Se esiste finito il limite:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t_0 + \Delta t) - P(t_0)}{\Delta t},$$

diremo che la funzione vettoriale $P(t)$ è derivabile in t_0 e scriviamo:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t_0 + \Delta t) - P(t_0)}{\Delta t} = P'(t_0) \tag{39}$$

$P'(t_0)$ è la **derivata** di $P(t)$ nel punto t_0. Riesce:

$$P'(t_0) = x'(t_0)\,\mathbf{i} + y'(t_0)\,\mathbf{j} + z'(t_0)\,\mathbf{k} \tag{40}$$

Se $P(t)$ è derivabile $\forall t \in [t_1, t_2]$, diremo che è derivabile in $[t_1, t_2]$. In tal caso, risulta definita una nuova funzione: la **derivata** di $P(t)$:

$$P'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t},$$

che nella notazione di Leibnitz si indica con $\frac{dP}{dt}$. Se $P(t)$ è derivabile si ha:

$$P'(t) = x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k}, \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

Ne consegue che $P(t)$ è derivabile in $[t_1, t_2]$ sono ivi derivabili le funzioni scalari $x(t), y(t), z(t)$. Riscriviamo il rapporto incrementale (38):

$$\frac{P(t_0 + \Delta t) - P(t_0)}{\Delta t},$$

supponendo $P(t)$ derivabile in t_0. In particolare:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t_0 + \Delta t) - P(t_0)}{\Delta t} = P'(t_0) \neq \mathbf{0},$$

onde per la (40) $[x'(t_0)]^2 + [y'(t_0)]^2 + [z'(t_0)]^2 > 0$, cioè le derivate di $x(t), y(t), z(t)$ non si annullano contemporaneamente in t_0. Denotando con (X, Y, Z) le coordinate correnti, l'equazione della retta secante a γ e passante per $P(t_0)$ e $P(t_0 + \Delta t)$ si scrive nella forma dei rapporti uguali:

$$\frac{X - x(t_0)}{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)} = \frac{Y - y(t_0)}{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)} = \frac{Z - z(t_0)}{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}, \tag{41}$$

giacchè gli incrementi delle funzioni $x(t), y(t), z(t)$, cioè:

$$x(t_0 + \Delta t) - x(t_0), y(t_0 + \Delta t) - y(t_0), z(t_0 + \Delta t) - z(t_0),$$

compongono una terna di numeri direttori della secante. Dividendo ogni membro della (41) per $\Delta t \neq 0$:

$$\frac{X - x(t_0)}{\frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}} = \frac{Y - y(t_0)}{\frac{y(t_0+\Delta t) - y(t_0)}{\Delta t}} = \frac{Z - z(t_0)}{\frac{z(t_0+\Delta t) - z(t_0)}{\Delta t}}, \tag{42}$$

Eseguendo il limite per $\Delta t \to 0$:

$$\frac{X - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{Y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{Z - z(t_0)}{z'(t_0)} \tag{43}$$

La (43) è l'equazione di una retta, giacchè per ipotesi i numeri reali $x'(t_0), y'(t_0), y'(t_0)$ non sono contemporaneamente nulli. Essi definiscono i numeri direttori della suddetta retta che è la posizione limite della retta secante per $\Delta t \to 0$, ovvero per $P(t_0 + \Delta t) \to P(t_0)$. Appare naturale definire tale retta, *retta tangente alla curva* γ nel punto $P(t_0)$. Quindi, denotando con τ_0 la retta tangente:

$$\tau_0 : \frac{X - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{Y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{Z - z(t_0)}{z'(t_0)} \tag{44}$$

Inoltre, se $P(t)$ è derivabile in $[t_1, t_2]$ e riesce $P'(t) \neq \mathbf{0}$, $\forall t \in [t_1, t_2]$, resta definita la retta tangente τ in ogni punto di γ:

$$\tau : \frac{X - x(t_0)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t_0)}{y'(t)} = \frac{Z - z(t_0)}{z'(t)} \tag{45}$$

Si osservi che la condizione $P'(t) \neq \mathbf{0}$ si traduce in $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 > 0$, cioè le derivate di $x(t), y(t), z(t)$ non si annullano contemporaneamente in t, $\forall t \in [t_1, t_2]$. In tal modo, la curva γ risulta essere continua e liscia. Come è noto dalla Geometria differenziale, aggiungendo l'ulteriore condizione rappresentata dalla corrispondenza biunivoca tra i punti di γ e i numeri reali appartenenti a $[t_1, t_2]$, si ottiene una *curva regolare.*

Riguardo al verso della retta tangente, vediamo che dalla (45) non risulta essere orientata. Per orientarla, definiamo la funzione:

$$H(t) = +\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}$$

Le orientazioni di τ sono fissate dai coseni direttori. Precisamente:

$$\left(\frac{x'(t)}{H(t)}, \frac{y'(t)}{H(t)}, \frac{z'(t)}{H(t)} \right)$$

e

$$\left(\frac{x'(t)}{-H(t)}, \frac{y'(t)}{-H(t)}, \frac{z'(t)}{-H(t)} \right)$$

La prima terna orienta τ nel verso concorde con quello secondo cui $P(t)$ si sposta su γ al crescere di t.