# Calcolo II

AlpT (@freaknet.org)

May 31, 2008

# Contents

# 1 Integrali indefiniti

## 1.1 Derivate notevoli

$D[f(x)+g(x)] = f'(x)+g'(x)$ $\quad$ $D[f(x)g(x)] = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$D[kf(x)] = kf'(x)$ $\quad$ $D\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

$Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ $\quad$ $Da^x = a^x \log_e a$

$D\log_a x = \dfrac{1}{x}\log_a e$ $\quad$ $D\ln x = \dfrac{1}{x}$

$D\sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $\quad$ $D\sqrt{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$D\sin x = \cos x$ $\quad$ $D\cos x = -\sin x$

$\sin'' x = -\sin x, \quad \sin''' x = -\cos x, \quad \sin^{(4)} x = \sin x$

$D\sinh x = \cosh x$ $\quad$ $D\cosh x = \sinh x$

$D\tan x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$ $\quad$ $D\cot x = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$

$D[\arcsin y] = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ $\quad$ $D[\arccos y] = -\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

$D[\arctan y] = \dfrac{1}{1+y^2}$ $\quad$ $D[\mathrm{arccot}\ y] = -\dfrac{1}{1+y^2}$

$D[\mathrm{arcsinh}\, y] = \dfrac{1}{\sqrt{y^2+1}}$ $\quad$ $D[\mathrm{arccosh}\, y] = \dfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}$

$D[\tanh y] = \dfrac{1}{\cosh^2 y}$ $\quad$ $D[\mathrm{arctanh}\, y] = \dfrac{1}{1-y^2}$

### 1.1.1 Integrali indefiniti immediati

(*) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c, \quad \alpha \neq -1, x>0, \alpha\in\mathbb{R}$ $\quad$ (0) $\int \frac{1}{x}dx = \int x^{-1}dx = \log|x|+c, \quad x\neq 0$

(1) $\int [f(x)]^\alpha f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$ $\quad$ (2) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)|+c$

(*) $\int e^x dx = e^x + c$ $\quad$ (*) $\int 0dx = c$

(*) $\int e^{f(x)} f'(x)\, dx = e^{f(x)}+c$

(*) $\int \sin x dx = -\cos x + c$ $\quad$ (*) $\int \cos x dx = \sin x + c$

(3) $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c$ $\quad$ (4) $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\mathrm{cotan}\, x + c$

(0) $\frac{1}{x}$ e' continua in $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ e quindi ammette primitiva. La sua primitiva in $]-\infty,0[$ e' $\log -x$, invece in $]0,+\infty[$ e' $\log x$, quindi in definitiva una sua primitiva e' sempre $\log|x|$
(1) con $\alpha\neq -1$, $f$ derivabile nel suo intervallo di definizione e $f(x)>0$
(2) con $f$ derivabile nel suo intervallo di definizione e $f(x)\neq 0$
(3) stiamo considerando le primitive in ogni $(a,b)\subseteq\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$
(4) stiamo considerando le primitive in ogni $(a,b)\subseteq\mathbb{R}\setminus\{\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\}$

### 1.1.2 Integrali indefiniti vari

$$\int \arcsin(x)\,dx = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} \qquad \int \arccos(x)\,dx = x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \tan(x)\,dx = -\log(\cos(x)) \qquad \int \arctan(x)\,dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

$$\int \sin x\cos x = \frac{\sin^2 x}{2}$$

$$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x$$

## 1.2 Integrazione per decomposizione

1.

$$\begin{aligned}
&\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx \quad \text{[formula di bisez.]}\\
&= \int \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2}\cos 2x dx = \frac{1}{2}\int 1 dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx\\
&= \frac{1}{2}\{x + c_1\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin 2x}{2} + c_2\right\} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(2\sin x\cos x) + c\\
&= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x\cos x + c = \frac{1}{2}(x + \sin x\cos x) + c
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
&\int \sin^2 x dx = \int (1-\cos^2 x) dx = \int 1 - \int \cos^2 x = \{x + c_1\} - \left\{\frac{1}{2}(x + \sin x\cos x) + c_2\right\}\\
&= x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x\cos x = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + c
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
&\int \log x\; dx = \int \underbrace{\log x}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)}\; dx\\
&= x\log x - \int \frac{1}{x} x dx = x(\log x - 1) + c \;\; \forall x \in [0,\infty]
\end{aligned}$$

4.

$$\int \arcsin x\; dx = \int \underbrace{\arcsin x}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)}\; dx$$

$f(x)$ e' definita in $[-1,1]$ ed e' li' continua (e quindi dotata di primitiva) non e' pero' derivabile in $-1, 1$, quindi calcoleremo le primitive in $]-1,1[$:

$$
\begin{aligned}
&\int \arcsin x \; dx = x \arcsin x - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} x \; dx \\
&= x \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \; dx \\
&= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int -2x(1-x^2)^{\frac{-1}{2}} \; dx \\
&\qquad \int [f(x)]^{\alpha} f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \;\; f(x) > 0, \; \alpha \neq -1 \\
&= x \arcsin x + (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + c = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c
\end{aligned}
$$

Si verifica (usando la definizione di derivata) che $D[x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}] = \arcsin x$ anche in $-1, 1$, quindi in definitiva:

$$\int \arcsin x \; dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c \;\; \forall x \in [-1, 1]$$

5. $$\int \arccos x \; dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + c \;\; \forall x \in [-1, 1]$$

6. $$
\begin{aligned}
&\int \arctan x \; dx = \int \arctan x \cdot 1 \; dx \\
&= x \arctan x - \int \frac{1}{1+x^2} x \; dx \\
&= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \; dx \\
&= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \; dx \\
&\qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + c \\
&= x \arctan x - \frac{1}{2} \log |1+x^2| + c \\
&= x \arctan x - \frac{1}{2} \log (1+x^2) + c
\end{aligned}
$$

## 1.3 Integrazione per sostituzione

1. Calcoliamo

$$\int \frac{1}{\sin x} dx$$

Sappiamo che

$$\frac{1}{\sin x} : ]-\infty, +\infty[ \setminus \{k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ovvero:

$$\frac{1}{\sin x} : \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ]k\pi, (k+1)\pi[ \longrightarrow \mathbb{R}$$

Inoltre $\frac{1}{\sin x}$ e' anche continua in ogni intervallo del tipo $]k\pi,(k+1)\pi[$, e quindi, sempre in questi intervalli, ammette primitiva. Limitiamoci allora a $]0,\pi[$:

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}} = \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\left[\frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2})\right]$$

$$f[\varphi(x)] = \frac{1}{\tan\frac{x}{2}},\ \ \varphi'(x) = \frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2}),\ \ \varphi(x) = \tan\frac{x}{2} :]0,\pi[\longrightarrow \mathbb{R},\ \ f(y) = \frac{1}{y}$$

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int f[\varphi(x)]\varphi'(x) = \left[\int f(y)dy\right]_{y=\varphi(x)}$$

$$= [\log|y|+c]_{y=\varphi(x)} = \log|\varphi(x)|+c = \log|\tan\frac{x}{2}|+c = \log\tan\frac{x}{2}+c$$

[il val. ass. lo togliamo perche' siamo in $]0,\pi[$

2. Calcoliamo $\int\sqrt{1-x^2}$. Scegliamo $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $\varphi(t)=\sin t$ e $\psi(x)=\arcsin x$. $f(x)$ e' continua in $[-1,1]$ e quindi ivi dotata di primitiva, $\varphi(t):[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ e' ivi invertibile e derivabile, con $cod\varphi(t)\subseteq[-1,1]$. Possiamo quindi applicare la seconda formula di sostituzione:

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx = \left[\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\right]_{t=\psi(x)} = \left[\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt\right]_{t=\psi(x)} =$$

$$\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \quad \text{[stiamo lavorando in } [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \text{ quindi } \cos t>0\text{ ]}$$

$$= \left[\int\cos^2 t\,dt\right]_{t=\psi(x)} = \left[\frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)+c\right] \quad \text{[per la formula di } \int\cos^2 t\,dt \text{ che conoscevamo gia']}$$

$$= \frac{1}{2}(\arcsin x + x\cos\arcsin x)+c = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-\sin^2\arcsin x})+c$$

$$= \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2})+c$$

3. $\int\tan(x)\,dx = -ln(cos(x))$

**Proof**:

$$\int\tan(x)\,dx = \int\frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = \int\frac{\sqrt{1-(\cos(x))^2}}{\cos(x)}dx$$

$$u=\cos(x)\,,\quad dx = \frac{d}{du}\arccos(u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\int\frac{\sqrt{1-(\cos(x))^2}}{\cos(x)}dx = \int -u^{-1}du = -\int u^{-1}du = -\ln(\cos(x))$$

## 1.4 Integrali razionali

Prima di tutto troviamo una formula per calcolare questo integrale:

$$I_n = \int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx$$

Cominciamo con $I_1$:

$$I_1 = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^1}\,dx = \int \frac{1}{a^2(\frac{x^2}{a^2}+1)}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{a}\frac{1}{(\frac{x^2}{a^2}+1)}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$$

Calcoliamo adesso $I_{n-1}$:

$$\begin{aligned}
I_{n-1} &= \int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,dx \\
&= \int \underbrace{1}_{g'(x)}\underbrace{(x^2+a^2)^{1-n}}_{f(x)}\,dx \\
&\quad D[(x^2+a^2)^{1-n}] = (1-n)(x^2+a^2)^{-n}2x \\
&= x(x^2+a^2)^{1-n} - \int (1-n)(x^2+a^2)^{-n}2xx\,dx \\
&= x(x^2+a^2)^{1-n} + 2(n-1)\int (x^2+a^2)^{-n}x^2\,dx \\
&= x(x^2+a^2)^{1-n} + 2(n-1)\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx \\
&= x(x^2+a^2)^{1-n} + 2(n-1)\int \frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^n} - \frac{a^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx \\
&= x(x^2+a^2)^{1-n} + 2(n-1)\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{a^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx \\
&= x(x^2+a^2)^{1-n} + 2(n-1)I_{n-1} - 2(n-1)a^2I_n \\
I_{n-1} &= x(x^2+a^2)^{1-n} + 2(n-1)I_{n-1} - 2(n-1)a^2I_n \\
I_{n-1}(3-2n) &- \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} = -2(n-1)a^2I_n \\
-I_{n-1}(3-2n) &+ \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} = 2(n-1)a^2I_n \\
I_n &= \frac{1}{2a^2(n-1)}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right]
\end{aligned}$$

Adesso arriviamo al sodo: vogliamo cercare di calcolare questo integrale:

$$\int \frac{A(x)}{B(x)}\,dx, \quad A(x), B(x) \in \mathbb{R}[x],\ \deg A(x) = m,\ \deg B(x) = n$$

supponiamo che $B(x)$ sia monomico e $n < m$, applichiamo allora la divisione tra polinomi:

$$\int \frac{A(x)}{B(x)}\,dx = \int Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}\,dx, \ \deg R(x) < n$$

$\int Q(x)\,dx$ lo sappiamo calcolare dato che e' un semplice polinomio.
$\int \frac{R(x)}{B(x)}\,dx$ rientra invece nel caso in cui il numeratore ha grado inferiore al denominatore.

Supponiamo che

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$$

siano le radici reali di $B(x)$ rispettivamente di molteplicita'

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$$

supponiamo inoltre che

$$\beta_1 + i\gamma_1, \beta_2 + i\gamma_2, \ldots, \beta_s + i\gamma_s$$

siano meta' delle radici complesse di $B(x)$ (le altre sono coniugate poiche' stiamo lavorando in $\mathbb{R}[x]$) rispettivamente di molteplicita'

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$$

quindi abbiamo $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i + 2\sum_{i=1}^{n} \mu_i = n$.
Possiamo scrivere

$$(\beta_j + i\gamma_j)(\beta_j + i\gamma_j) = x^2 + p_j x + q_j$$

Si puo' dimostrare che:

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \sum_{j=1}^{r}\sum_{h=1}^{\lambda_j} \frac{a_{jh}}{(x-\alpha_j)^h} + \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{A_{ik}x + B_{ik}}{(x^2 + p_i x + q_i)^k}$$

dove $x^2 + px + q = (\beta_j + i\gamma_j)(\beta_j + i\gamma_j)$ e' un polinomio irriducibile in $\mathbb{R}[x]$ e quindi con $\Delta < 0$, e $a_{jh}, A_{ik}, B_{ik}$ sono delle costanti.
Imponendo l'uguaglianza tra il polinomio del numeratore del primo membro e quello del numeratore del secondo membro, si risolve un sistema, ottenendo cosi' tutte le costanti $a_{jh}, A_{ik}, B_{ik}$.
Giunti a questo punto bastera' integrare ogni pezzo del secondo membro. Anal-

izziamo i suoi singoli pezzi:

$\displaystyle\int \frac{a}{(x-\alpha)}\,dx = a\log|x-\alpha| + c$

$\displaystyle\int \frac{a}{(x-\alpha)^k}\,dx = a\int (x-\alpha)^{-k}\,dx = a\frac{(x-\alpha)^{1-k}}{1-k} + c$

$\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)}\,dx = A\int \frac{x}{(x^2+px+q)}\,dx + B\int \frac{1}{(x^2+px+q)}\,dx$

$\displaystyle= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)}\,dx + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{1}{(x^2+px+q)}\,dx$

$\displaystyle= \frac{A}{2}\log|x^2+px+q| + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{1}{(x^2+px+q)}\,dx$

$\displaystyle= \frac{A}{2}\log|x^2+px+q| + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}\,dx$

$\quad t = x+\frac{p}{2} \quad a = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}} = \sqrt{\frac{4q-p^2}{4}} = \sqrt{-\Delta} \quad -\Delta > 0$ perche' $x^2+px+q$ ha $\Delta < 0$

$\displaystyle= \frac{A}{2}\log(x^2+px+q) + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\left[\int \frac{1}{t^2+a^2}\,dt\right]_{t=x+\frac{p}{2}}$

togliamo il val. ass. dato che $x^2+px+q > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\displaystyle\int \frac{1}{t^2+a^2}\,dt$ sappiamo calcolarlo con la formula che abbiamo visto prima

$\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx = A\int \frac{x}{(x^2+px+q)^k}\,dx + B\int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}\,dx$

$\displaystyle= \frac{A}{2}\int (2x+p)(x^2+px+q)^{-k}\,dx + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{1}{\left((x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^k}\,dx$

$\quad t = x+\frac{p}{2} \quad a = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}} = \sqrt{\frac{4q-p^2}{4}} = \sqrt{-\Delta} \quad -\Delta > 0$ perche' $x^2+px+q$ ha $\Delta < 0$

$\displaystyle= \frac{A}{2}\frac{(x^2+px+q)^{1-k}}{1-k} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\left[\int \frac{1}{(t^2+a^2)^k}\,dt\right]_{t=x+\frac{p}{2}}$

$\displaystyle\int \frac{1}{(t^2+a^2)^k}\,dt$ sappiamo calcolarlo con la formula che abbiamo visto prima

## 1.5 Integrali irrazionali

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

dove $R$ e' una funzione razionale.
In parole povere: quello che si cerca di fare e' ricondurre $ax^2+bx+c$ a una somma/differenza di due quadrati del tipo $(x+\alpha)^2 \pm k^2$. Dopodiche' si sostituisce $x+\alpha$ con $\sin(t)$ oppure $\sinh(t)$ oppure $\cosh(t)$, in modo tale da ricondursi a una identita' fondamentale trigonometrica.
Piu' in dettaglio: distiguiamo 3 casi.

CASE: $a < 0$

Poiche' il radicale deve avere senso, imponiamo che $ax^2 + bx + c \geq 0$, si ha che

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c \geq 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow \ \Delta > 0$$

Scriviamo $ax^2 + bx + c$ in modo opportuno:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) =$$

$$y = x + \frac{b}{2a}, \quad k = \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|} \quad \text{nota } k \text{ e' } > 0$$

$$= a(y^2 - k^2) = -a(k^2 - y^2)$$

Passiamo a calcolare l'integrale e applichiamo la sostituzione con $y = x + \frac{b}{2a}$:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\ dx = \left[\int R\left(y - \frac{b}{2a}, \sqrt{-a}\sqrt{k^2 - y^2}\right)\ dy\right]_{y = x + \frac{b}{2a}}$$

Adesso applichiamo una nuova sostituzione con

$$y = k \sin t, \quad y' = k \cos t, \quad t = \arcsin \frac{y}{k}$$

abbiamo:

$$= \left[\int R\left(k \sin t - \frac{b}{2a}, \sqrt{-a}\sqrt{k^2 - k^2 \sin^2 t}\right) k \cos t\ dt\right]_{t = \arcsin \frac{y}{k}} =$$

$$\sqrt{k^2 - k^2 \sin^2 t} = k\sqrt{1 - \sin^2 t} = k \cos t$$

$$= \left[\int R\left(k \sin t - \frac{b}{2a}, \sqrt{-a}k \cos t\right) k \cos t\ dt\right]_{t = \arcsin \frac{y}{k}}$$

CASE: $a > 0,\ \Delta > 0$

Si procede analogamente:

$$y = x + \frac{b}{2a}, \quad k = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$ax^2 + bx + c = a(y^2 - k^2)$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\ dx = \left[\int R\left(y - \frac{b}{2a}, \sqrt{a}\sqrt{y^2 - k^2}\right)\ dy\right]_{y = x + \frac{b}{2a}}$$

Adesso per dar senso a $\sqrt{y^2 - k^2}$ dobbiamo distinguere due casi.

CASE: $y \in [k, +\infty[$

Per la seconda sostituzione poniamo

$$y = k \cosh t, \quad y' = k \sinh t, \quad t = \operatorname{arcosh} \frac{y}{k}$$

cosi' abbiamo:

$$= \left[\int R\left(k \cosh t - \frac{b}{2a}, \sqrt{a}\sqrt{k^2 \cosh^2 t - k^2}\right) k \sinh t\ dt\right]_{t = \operatorname{arcosh} \frac{y}{k}} =$$

$$\sqrt{k^2 \cosh^2 t - k^2} = k\sqrt{\cosh^2 t - 1} = k \sinh t$$

$$= \left[\int R\left(k \cosh t - \frac{b}{2a}, \sqrt{a}k \sinh t\right) k \sinh t\ dt\right]_{t = \operatorname{arcosh} \frac{y}{k}}$$

CASE: $y \in ] - \infty, -k]$

Per la seconda sostituzione poniamo

$$y = -k\cosh t, \ \ y' = -k\sinh t, \ \ t = \operatorname{arcosh}\frac{-y}{k}$$

cosi' abbiamo:

$$= \left[\int -R\left(-k\cosh t - \frac{b}{2a}, \sqrt{a}k\sinh t\right) k\sinh t \ dt\right]_{t=\operatorname{arcosh}\frac{-y}{k}}$$

Case: $a > 0, \Delta < 0$

Procedendo come abbiamo fatto fin'ora:

$$y = x + \frac{b}{2a}, \quad k = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right) = a(y^2 + k^2)$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) \ dx = \left[\int R\left(y - \frac{b}{2a}, \sqrt{a}\sqrt{y^2 + k^2}\right) \ dy\right]_{y=x+\frac{b}{2a}}$$

Per la seconda sostituzione poniamo

$$y = k\sinh t, \ \ y' = k\cosh t, \ \ t = \operatorname{arsinh}\frac{y}{k}$$

cosi' abbiamo:

$$= \left[\int R\left(k\sinh t - \frac{b}{2a}, \sqrt{a}\sqrt{k^2\sinh^2 t + k^2}\right) k\cosh t \ dt\right]_{t=\operatorname{arsinh}\frac{y}{k}} =$$

$$\sqrt{k^2\sinh^2 t + k^2} = k\sqrt{\sinh^2 t + 1} = k\cosh t$$

$$= \left[\int R\left(k\sinh t - \frac{b}{2a}, \sqrt{a}k\cosh t\right) k\cosh t \ dt\right]_{t=\operatorname{arsinh}\frac{y}{k}}$$

## 1.6 Integrali vari

$$\int x^m(a + bx^n)^p \ dx, \ \ m, n, p \in \mathbb{Q}$$

Case: $p \in \mathbb{Z}$

Si effettua la sostituzione: $x = t^r, \ \ r = mcm(m, n)$

Case: $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}, \ p \notin \mathbb{Z}$

Si effettua la sostituzione: $a + bx^n = t^s$, dove $s$ e' il denominatore di $p$.

Case: $p + \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$

Si effettua la sostituzione: $\frac{a}{x^n} + b = t^s$

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \ dx$$

Si effettua la sostituzione con:

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$
$$x = \frac{b - dt^n}{ct^n - a}$$
$$x' = \frac{(ad - bc)nt^{n-1}}{(ct^n - a)^2}$$

e si ottiene:

$$= \left[ \int R\left(\frac{b-dt^n}{ct^n-a}, t\right) \frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(ct^n-a)^2}\, dt \right]_{t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}}$$

# 2 Serie numeriche

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$$

viene chiamata *serie numerica*.
La *somma parziale* di posto $n$ e' definita come:

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Il carattere della serie dipende equivalea al carattere della successione $\{s_n\}$ che puo' essere

- convergente a un limite $S \in \mathbb{R}$, chiamato somma della serie
- divergente a $\pm\infty$
- oscillante

## 2.1 Assoluta convergenza

La serie si dice *assolutamente convergente* quando la serie dei suoi valori assoluti e' convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ass. conv. } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ convergente}$$

**Theorem 2.1.**

$$\textit{assolutamente conv.} \Rightarrow \textit{conv.}$$

**Proof**:
Usiamo il criterio di Cauchy (vedi thm [2.3,pg.15]), per dimostrare la tesi, ovvero mostriamo che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v \in \mathbb{N} : |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon\ \forall n > v\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$, per Hp:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ convergente } \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{per Cauchy}}$$

$$\Leftrightarrow\ \exists v' \in \mathbb{N} : ||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+k}|| < \varepsilon\ \forall n > v\ \forall k \in \mathbb{N}$$

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}| \le |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+k}| < \varepsilon\ \forall n > v'$$

Quindi la tesi e' dimostrata con $v = v'$

□

**Example 2.1.** di serie conv. ma non ass. conv.

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

e' convergente per quanto visto nell'esempio [2.3,pg.26], ma non e' ass. conv. poiche' la serie dei valori assoluti e' la serie armonica.

**Example 2.2.** Esempio di serie di funzioni non ass. conv. ma unif. conv.:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x$$

dove ogni funzione e' definita in $[-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$.
Non e' ass. conv., infatti fissato un $x \neq 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big| \frac{(-1)^{n-1}}{n} x \Big| = |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Proviamo che e' unif. conv. usando il criterio di cauchy, ovvero

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists v = v(\varepsilon) : \; |\frac{(-1)^n}{n} x + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x + \cdots + \frac{(-1)^{n+p-1}}{n} x| < \varepsilon \; \forall n > v \; \forall p \in \mathbb{N} \; \forall x \in [-1, 1]$$

Poiche' $x \in [-1, 1]$ si ha

$$\begin{aligned} &|\frac{(-1)^n}{n} x + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x + \cdots + \frac{(-1)^{n+p-1}}{n} x| < \varepsilon \; \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \; |x||\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots + \frac{(-1)^{n+p-1}}{n}| < \varepsilon \; \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \; |\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots + \frac{(-1)^{n+p-1}}{n}| < \varepsilon \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato nell'exp [2.3,pg.26] che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, quindi per il criterio di Cauchy di convergenza delle serie numeriche (vedi [2.3,pg.15]) abbiamo

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v \in \mathbb{N} : \; |\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots + \frac{(-1)^{n+p-1}}{n}| < \varepsilon \; \forall n > v \; \forall p \in \mathbb{N}$$

quindi la tesi e' acquisita

## 2.2 Serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

si chiama serie armonica. Si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \longrightarrow +\infty$$

**Proof**:
$\langle 1 \rangle$1. Dimostrazione 1
Osserviamo che

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = s_{n+1}$$

La serie $\{s_n\}$ e' crescente, e quindi non oscillante.
$\langle 2 \rangle$1. Dim. che l'estratta $s_{2^m} \longrightarrow +\infty$
$\langle 3 \rangle$1. Dimostriamo che $s_{2^m} > \frac{m+1}{2}$

Per induzione.
Base $m = 1$:
$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 1 = \frac{m+1}{2}$$
Hp: $s_{2^m} > \frac{m+1}{2}$ e' vera
Ts:
$$s_{2^{m+1}} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^m}}_{> \frac{m+1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2^m+1} + \cdots + \frac{1}{2^{m+1}}}_{> \underbrace{\frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m+1}}}_{2^m \text{ volte}}} > \frac{m+1}{2} + \frac{2^m}{2^{m+1}} = \frac{(m+1)+1}{2}$$
Poiche' $\frac{m+1}{2} \longrightarrow \infty$, anche $s_{2^m} \longrightarrow \infty$.
Poiche' $\{s_{2^m}\}$ e' un'estratta di $\{s_n\}$, si ha $s_n \longrightarrow \infty$. $\square$

⟨1⟩2. Dimostrazione 2
Osservando che
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < e \; \forall n \in \mathbb{N}$$
abbiamo
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e \Rightarrow n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 \Rightarrow \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log(n+1) - \log n < \frac{1}{n}$$
allora maggioriamo $s_n$:
$$s_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} > (\log 2 - \log 1) + (\log 3 - \log 2) + \cdots + (\log(n+1) - \log n) = \log(n+1) - \log 1 = \log(n+1)$$
ovvero $s_n > \log(n+1)$. Poiche' $\log(n+1) \longrightarrow \infty$, si ha che $s_n \longrightarrow \infty$ $\square$

## 2.3 Serie di Mengoli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

**Proof**:
Osserviamo che
$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$
allora
$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$
$$\lim s_n = \lim \frac{n}{n+1} = 1$$

## 2.4 Serie geometrica

Serie geometrica di ragione $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \ldots$$

Case: $x = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots = +\infty$$

Case: $x \neq 1$

$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \;\Leftrightarrow\; (1-x)s_n = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) \;\Leftrightarrow\; (1-x)s_n = 1 - x^{n+1}$

$\Leftrightarrow\; s_n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1-x}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & -1 < x < 1 \\ +\infty & x > 1 \\ \nexists \text{ (e' oscillante)} & x \le -1 \end{cases}$$

CASE: $x < -1$

La serie non e' assolutamente convergente:

$$|s_n| = \frac{|1 - x^n|}{|1-x|} \ge \frac{||1| - |x|^n|}{|1-x|} = \frac{|1 - |x|^n|}{|1-x|} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{|1-|x|^n|}{|1-x|} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |s_n| = +\infty$$

## 2.5 Serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \quad \text{fissato } x \in \mathbb{R}$$

si ha che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \begin{cases} \text{converge} & x \in ]1, +\infty[ \\ \text{diverge a } +\infty & x \in ]-\infty, 1] \end{cases}$$

**Proof**: [1]

CASE: $x = 1$

Questa e' la serie armonica semplice, quindi diverge a $+\infty$

CASE: $x = 0$

$1 + \cdots + 1 \ldots,$ , quindi diverge a $+\infty$

CASE: $x < 0$

$\lim \frac{1}{n^x} = \lim n^{-x} = +\infty$, quindi per il thm [2.2,pg.15], la serie non converge.

Poiche' $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ e' a termini positivi, divergera' a $+\infty$.

CASE: $0 < x < 1$

$$x < 1 \Rightarrow n^x \le n$$

$$n^x \le n \Leftrightarrow \frac{1}{n^x} \ge \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{criterio del confronto}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = +\infty$$

Quindi, come prima, la serie diverge a $+\infty$.

CASE: $x = 2$

Consideriamo la serie resto di posto 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

[1] useremo varie volte il criterio del confronto (vedi [2.10,pg.17]) e il criterio di Raabe (vedi [2.7,pg.21])

e il suo termine generale $\frac{1}{(n+1)^2}$, si ha

$$(n+1)^2 \geq n(n+1) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{e' la serie di mengoli, che converge}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \quad \text{converge per il criterio del confronto}$$

Case: $x > 2$

$$\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, come abbiamo visto prima, converge, quindi per il criterio del confronto, anche $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ converge.

Case: $1 < x < 2$

Usiamo il cor del criterio di Raabe:

$$\lim_{n\to\infty} n \left( \frac{\frac{1}{n^x}}{\frac{1}{(n+1)^x}} - 1 \right) = \lim \frac{(n+1)^x - n^x}{n^{x-1}}$$

$$n+1 = n(1+\frac{1}{n})$$

$$= \lim \frac{(1+\frac{1}{n})^x n^x - n^x}{n^{x-1}} = \lim \frac{n+1)^x - 1}{n^{-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^x - 1}{\frac{1}{n}} = x \quad \text{e' il lim. notevole}$$

Poiche' $x > 1$, per il cor del criterio di Raabe, la serie converge.

## 2.6 Serie resto

Sia $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = a_{k+1} + a_{k+2} + \dots \quad (2)$$

e' chiamata serie resto di posto $k$, poiche' e' in sostanza la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ priva dei primi $k$.

Queste due serie hanno lo stesso carattere, inoltre

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = S - s_k$$

dove $S = \lim s_n$. Con $t_n$ indichiamo le somme parziali di $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$.

**Proof**:

Basta notare che

$$t_n = s_{k+n} - s_k$$

Quindi se $s_n$ converge, per il thm delle successioni estratte, anche $s_{k+n}$ converge, e quindi pure $t_n$.

Se $t_n$ converge, $s_{k+n}$ converge. Poiche' $s_{k+n}$ e' un estratta del tipo $s_{c+n}$, con

$c$ costante, anche $s_n$ converge. Infine

$$t_n = s_{k+n} - s_k$$
$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_{k+n} - s_k = \lim_{n\to\infty} s_{k+n} - \lim_{n\to\infty} s_k = S - s_k$$

$\square$

Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n : \ \exists v \in \mathbb{N} : \ \forall n > v \ b_n = a_n$$

per quanto detto prima

$$\sum_{n=v+1}^{\infty} b_n = S - s_v$$

dove $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $s_v$ e' la somma parziale di posto $v$. Quindi, la serie $A$ e la serie $B$ definitivamente uguale a $A$, hanno lo stesso carattere.

## 2.7 Criteri di convergenza

**Theorem 2.2.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \textit{converge} \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

**Proof**:
⟨1⟩1. Dim $\Rightarrow$
Per Hp $s_n \longrightarrow S$

$$a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$$
$$s_{n+1} \longrightarrow S, \ \ s_n \longrightarrow S \ \Rightarrow \ a_{n+1} \longrightarrow 0$$

⟨1⟩2. Dim $\not\Leftarrow$
$\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ ma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

**Theorem 2.3.** *Criterio di convergenza di Cauchy per le serie numeriche.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ \textit{converge} \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \exists v \in \mathbb{N} : \ |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon \ \forall n > v \ \forall k \in \mathbb{N}$$

**Proof**:
⟨1⟩1. Dim $\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ \text{converge} \ \Rightarrow \ \{s_n\} \text{ converge} \ \Rightarrow \ \{s_n\} \ \text{ soddisfa la cond. di Cauchy per succ:}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v \in \mathbb{N} : \ \forall p, q > v \ |s_p - s_q| < \varepsilon$$

Fissiamo $n > v, \ q = n, \ p = n + k$ con un qualsiasi $k$ libero, allora

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| = |s_{n+k} - s_n| = |s_p - s_q| < \varepsilon$$

⟨1⟩2. Dim $\Leftarrow$
Dobbiamo dimostrare che $\{s_n\}$ converge, ovvero che soddisfa la condizione di Cauchy per succ.:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v \in \mathbb{N} : \ \forall p, q > v \ |s_p - s_q| < \varepsilon$$

Per Hp:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v' \in \mathbb{N} : \ |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon \ \forall n > v' \ \forall k \in \mathbb{N} \ \ (1)$$

Allora, ponendo $v = v'$,

CASE: $p = q$

$$|s_p - s_q| = 0 < \varepsilon$$

CASE: $p > q$

$$|s_p - s_q| = |a_{q+1} + \cdots + a_p| < \varepsilon \text{ per la (1), dove } n = q,\ k = p - n$$

CASE: $p < q$

$$|s_p - s_q| = |s_q - s_p| = |a_{p+1} + \cdots + a_q| < \varepsilon \text{ per la (1), dove } n = p,\ k = q - n$$

□

## 2.8 Serie somma

Sommiamo due serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

Come primo risultato abbiamo che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge ad } A \wedge \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge a } B \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \text{ converge a } A + C$$

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty \oplus \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \pm\infty \right) \vee \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \pm\infty \right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \pm\infty$$

Nota [2]. Per il caso in cui una diverge a $+\infty$ e l'altra $-\infty$, non si puo' dire nulla a priori.

Infine, dato $\lambda \in \mathbb{R}$, abbiamo:

$$\lambda = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = 0$$

$$\lambda > 0 \wedge \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \pm\infty$$

$$\lambda < 0 \wedge \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \mp\infty$$

## 2.9 Serie a termini non negativi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

si dice a termini non negativi $\Leftrightarrow$

$$\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \geq 0$$

[2] con $\oplus$ indichiamo lo XOR

**Theorem 2.4.** *Una serie a termini non negativi (converge)* $\vee$ *(diverge a* $+\infty$*).*

**Proof**:
Basta osservare che

$$s_{n+1} = s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \ \Rightarrow \ s_{n+1} \geq s_n$$

ovvero $\{s_n\}$ e' non decrescente.

□

## 2.10 Criterio del confronto

Date due serie a termini non negativi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

con $0 \leq a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \text{ converge a T } \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{ converge a S, con } S \leq T$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -\infty \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$$

**Proof**:
$\langle 1 \rangle 1$. Dimostriamo il primo caso.

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n \leq b_1 + \cdots + b_n = t_n$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \text{ converge } \Rightarrow \ t_n \leq \sup\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} = T \in \mathbb{R}$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ a_n \geq 0 \Rightarrow s_n \text{ e' non decr} \Rightarrow \underbrace{0}_{\to 0} \leq \underbrace{s_n}_{\to S} \leq \underbrace{T}_{\to T} \Rightarrow S \leq T \in \mathbb{R}$$

□

## 2.11 Criterio del rapporto

Data una serie a termini positivi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \ a_n > 0$$

si ha

$$\exists 0 \leq h < 1 : \ \frac{a_n + 1}{a_n} \leq h \ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{ converge}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{ diverge a } +\infty$$

**Proof**:

⟨1⟩1. Dim. il punto 1

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le h,\ a_n > 0\ \Rightarrow$$
$$a_{n+1} \le h a_n$$
$$a_n \le h a_{n-1}$$
$$h a_n \le h^2 a_{n-1}$$
$$a_{n+1} \le h a_n \le h^2 a_{n-1}\ (1)$$

⟨2⟩1. Dim per induzione che $a_{n+1} \le h^n a_1$:

$$a_{(n+1)+1} \underbrace{\le}_{\text{per la (1)}} h a_{n+1} \underbrace{\le}_{\text{per la Hp induttiva}} h^{n+1} a_1\ \Rightarrow\ a_{n+2} \le h^{n+1} a_1$$

⟨2⟩2. Q.E.D.

$$\sum_{n=1}^{\infty} h^n a_1 = a_1 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} h^n}_{\text{serie geom.}}\ ,\ 0 \le h < 1\ \Rightarrow\ a_1 \sum_{n=1}^{\infty} h^n \text{ converge}$$

Allora, da $a_{n+1} \le a_1 h^n$, per il criterio del confronto, deduciamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

⟨1⟩2. Dim. il punto 2

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1,\ a_n > 0\ \Rightarrow\ a_{n+1} \ge a_n > 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n \ne 0$$

e quindi diverge a $+\infty$.

□

**Corollary 2.5.** *Avendo la serie a termini positivi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$$

*si ha:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} l < 1\ \Rightarrow\ \textit{la serie converge} \\ l > 1\ \vee\ l = +\infty\ \Rightarrow\ \textit{la serie diverge a } +\infty \\ l = 1\ \Rightarrow\ \textit{caso dubbio: puo' convergere o divergere} \end{cases}$$

**Proof**:

⟨1⟩1. Dim il caso $l < 1$

$l < 1\ \Rightarrow\ \exists h \in \mathbb{R}:\ l < h < 1$

Per la permanenza del segno:

$$\exists v \in \mathbb{N}:\ \forall n > v\ \frac{a_{n+1}}{a_n} < h$$

Allora, per il criterio del rapporto, la serie resto

$$\sum_{n=v+1}^{\infty} a_n$$

converge. Per il thm sulle serie resto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge pure.

$\langle 1\rangle 2.$ Dim il caso $l > 1 \ \vee \ l = +\infty$

Sempre per la permanenza del segno[3]:

$$\exists v \in \mathbb{N} : \ \forall n > v \ \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

quindi per il criterio del rapporto, la serie resto

$$\sum_{n=v+1}^{\infty} a_n$$

diverge a $+\infty$. Per il thm sulle serie resto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

diverge a $+\infty$ pure.

$\langle 1\rangle 3.$ Dimostriamo che si ha un caso dubbio in $l = 1$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, ma

$$\lim \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1 = \lim \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}$$

□

## 2.12 Criterio della radice

Data una serie a termini non negativi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \ a_n \geq 0$$

si ha

$$\exists 0 \leq h < 1 : \ \sqrt[n]{a_n} \leq h \ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{ converge}$$

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{ diverge a } +\infty$$

**Proof**:

$\langle 1\rangle 1.$ Punto 1

$$\sqrt[n]{a_n} \leq h \ \Leftrightarrow \ a_n \leq h^n$$

$h^n$ e' il termine generale della serie geometrica di ragione $h$.

$$h \in [0,1[ \ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} h^n \text{ converge}$$

Per il criterio del confronto, converge pure la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$\langle 1\rangle 2.$ Punto 2

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \ \Leftrightarrow \ a_n \geq 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n \neq 0$$

e quindi diverge a $+\infty$.

**Corollary 2.6.** *Avendo la serie a termini non negativi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

[3] nel caso $l = +\infty$, abbiamo che $\forall k > 0 \ \exists v \in \mathbb{N} : \ \forall n > v \ \frac{a_{n+1}}{a_n} > k$, allora fissiamo $k = 1$

*si ha:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} l < 1 \;\Rightarrow\; \textit{la serie converge} \\ l > 1 \,\vee\, l = +\infty \;\Rightarrow\; \textit{la serie diverge a } +\infty \\ l = 1 \;\Rightarrow\; \textit{caso dubbio: puo' convergere o divergere} \end{cases}$$

*La dimostrazione e' analoga a quella del cor [2.5,pg.18].*

## 2.13 Criterio di Raabe

Data una serie a termini positivi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\ a_n > 0$$

si ha

$$\exists h > 1 :\ n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq h\ \forall n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1\ \forall n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge a } +\infty$$

**Proof**:
⟨1⟩1. Punto 1

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq h \;\Leftrightarrow\; n(a_n - a_{n+1}) \geq h a_{n+1} \;\Leftrightarrow\; n a_n - n a_{n+1} - a_{n+1} \geq h a_{n+1} - a_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow\; n a_n - (n+1) a_{n+1} \geq (h-1) a_{n+1} \;\Leftrightarrow a_{n+1} \leq \frac{n a_n - (n+1) a_{n+1}}{h-1} \quad (*)$$

⟨2⟩1. Dim che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_n - (n+1) a_{n+1}}{h-1}$ converge

$$t_n = \frac{a_1 - 2a_2}{h-1} + \frac{2a_2 - 3a_3}{h-1} + \cdots + \frac{n a_n - (n+1) a_{n+1}}{h-1} = \frac{a_1 - (n+1) a_{n+1}}{h-1}$$
$$= \frac{a_1}{h-1} - \frac{(n+1) a_{n+1}}{h-1} \leq \frac{a_1}{h-1}$$

Quindi $\{t_n\}$ e' una successione limitata da $\frac{a_1}{h-1}$. Per Hp, e' anche a termini positivi, quindi converge.

⟨2⟩2. Q.E.D.

Per il criterio del confronto, da

$$a_{n+1} \leq \frac{n a_n - (n+1) a_{n+1}}{h-1}$$

deduciamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

⟨1⟩2. Punto 2

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leq 1 \;\Leftrightarrow\; n(a_n-a_{n+1})\leq a_{n+1} \;\Leftrightarrow\; na_n\leq(1+n)a_{n+1}$$
$$\Leftrightarrow\; (1+n)a_{n+1}\geq na_n\;\geq(n-1)a_{n-1}\geq\cdots\geq 1\cdot a_1$$
$$\Rightarrow\; a_{n+1}\geq\frac{a_1}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1}{n+1}=a_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=+\infty \;\text{ e' la serie armonica}$$
$$\Rightarrow\;\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}=+\infty\;\;\text{[crit. del confronto]}$$

□

**Corollary 2.7.** *Data una serie a termini positivi:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\quad\forall n\in\mathbb{N}\;a_n>0$$

*si ha*

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\begin{cases}l<1\;\vee\;l=-\infty\;\Rightarrow\;\;\textit{la serie diverge a }+\infty\\ l>1\;\vee\;l=+\infty\;\Rightarrow\;\;\textit{la serie converge}\\ l=1\;\Rightarrow\;\;\textit{caso dubbio: puo' convergere o divergere}\end{cases}$$

*La dimostrazione e' analoga a quella del cor [2.5,pg.18].*

## 2.14 Criterio di Abel

Se $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ e' convergente, e se la successione numerica $\{b_n\}$ e' pure convergente, allora $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ e' convergente.

## 2.15 Criterio del rapporto migliorato

Data due serie a termini positivi:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\quad\forall n\in\mathbb{N}\;a_n>0$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\quad\forall n\in\mathbb{N}\;b_n>0$$

tali che

$$\exists v\in\mathbb{N}:\;\;\forall n>v\;\;\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\frac{b_{n+1}}{b_n}$$

allora

1. $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge
2. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ diverge

## 2.16 Criterio del confronto del limite

Date due serie a termini non negativi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\; a_n \geq 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\; b_n \geq 0 \qquad (2)$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c, \;\; 0 < c < +\infty \Rightarrow \text{ (1) e (2) convergono } \vee \text{ (1) e (2) divergono}$$

**Proof**:

Supponiamo che $b_n$ converga, e supponiamo per assurdo che $a_n$ non converga. Allora, per il thm [2.2,pg.15], si ha

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = k \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty \text{ assurdo}$$

Supponiamo che $b_n$ diverga, e supponiamo per assurdo che $a_n$ non diverga (e quindi converge essendo una serie a termini non negativi). Allora, per il thm [2.2,pg.15], si ha

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = k \neq 0, \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \text{ assurdo}$$

□

## 2.17 Criterio dell'integrale

Se $f(x) : [a, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ e' una funzione positiva non crescente, allora $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ e $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ hanno lo stesso carattere.

## 2.18 Serie commutativa

Sia $r : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una permutazione (una mappa biunivoca), le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad b_n = a_{r(n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

hanno lo stesso carattere, e se convergono, hanno la stessa somma.

**Proof**:

$$a_{r(i)} \leq s_{r(i)} = a_{r(i)} + a_{r(i)-1} + \cdots + a_1$$

$$a_{r(i)} + a_{r(j)} \leq s_{\max\{r(i),r(j)\}} = \begin{cases} a_{r(i)} + a_{r(i)-1} + \cdots + a_{r(j)} + \cdots + a_1 & r(i) > r(j) \\ a_{r(j)} + a_{r(j)-1} + \cdots + a_{r(i)} + \cdots + a_1 & r(j) > r(i) \end{cases}$$

...

LET: $m = \max\{r(1), \ldots, r(n)\}$

$t_n = b_1 + \cdots + b_n = a_{r(1)} + \cdots + a_{r(n)} \leq a_1 + \cdots + a_m = s_m$

$s_n$ e' crescente $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{s_n\} = S$

$s_n \leq S \; \forall n \in \mathbb{N}$

$t_n \leq s_m \leq S \; \forall n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; t_n$ e' limitata $\Rightarrow$ $t_n$ (essendo a termini non neg) converge

Per il viceversa, basta riapplicare il procedimento di prima, considerando che $a_n = b_{\overline{r}(n)}$, dove $\overline{r}$ e' l'inversa di $r$.
Inoltre,

$$\begin{aligned}&t_n \leq S\ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ T \leq S\\ &s_n \leq T\ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ S \leq T\\ &T = S\end{aligned}$$

□

**Theorem 2.8.** *Per una qualunque serie vale il seguente fatto:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ e' ass. conv.} \Rightarrow \text{ vale la prop. commutativa per serie}$$

*Ovvero, se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e' ass. conv, allora una sua qualsiasi permutazione di indici, da' una serie con lo stesso carattere e somma.*

## 2.19 Serie associativa

A partire dalla serie

$$(1)\ \ a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$$

associamo i suoi termini, ottenendo una nuova serie

$$(2)\ \ (a_1+\cdots+a_{k_1})+(a_{k_1+1}+\cdots+a_{k_2})+(a_{k_2+1}+\cdots+a_{k_3})+\cdots+(a_{k_{n-1}+1}+\cdots+a_{k_n})+\cdots = b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n+\ldots$$

ovvero

$$b_n = a_{k_{n-1}+1} + \cdots + a_{k_n}$$

con $\{k_n\}$ successione di numeri naturali.

**Theorem 2.9.**

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \ \Rightarrow\ \exists \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S$$

**Proof**:
Le somme parziali di (2) sono
$t_n = b_1 + \cdots + b_n = (a_1 + \cdots + a_{k_1}) + \cdots + (a_{k_{n-1}+1} + \cdots + a_{k_n}) = s_{k_n}$
quindi la successione $\{t_n\} = \{s_{k_n}\}$ e e' un'estratta di $\{s_n\}$. Poiche' le estratte hanno lo stesso limite delle loro successioni, si ha la tesi.
$\langle 1 \rangle$1. Non vale il viceversa
Prendiamo ad esempio $\{k_n\} = \{2n\}$ e come prima serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

l'associata diventa:

$$(-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \ldots$$

Quindi quest'ultima converge, ma la prima no.

□

## 2.20 Serie a segni alterni

La serie

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n,\quad a_{2n+1} \geq 0,\ a_{2n} \leq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$$

si chiama serie alternante.

**Theorem 2.10.** *Sia la* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie alternante con almeno un termine non nullo, allora*

$$\{|a_n|\}\ \textit{non decrescente} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ \textit{oscillante}$$

**Proof**:
Poiche' $\{|a_n|\}$ e' a termini non neg, $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{|a_n|\} > 0$, inoltre poiche' e' non decr.

$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|a_n|\} > 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} |a_n| \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow$ la (1) non converge

$\langle 2\rangle$1. Supponiamo per assurdo che (1) diverga a $+\infty$

Consideriamo l'estratta $\{s_{2n}\}$,

$$s_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{a_{2n+1}}_{\underbrace{\geq 0}_{\text{perche' } a_{2n+1} \text{ e' di posto dispari}}} + \underbrace{a_{2n+2}}_{\leq 0} = s_{2n} + \underbrace{|a_{2n+1}| - |a_{2n+2}|}_{\underbrace{\leq 0}_{\text{la serie } \{|a_n|\} \text{ e' non decr.}}} \leq s_{2n}$$

$$\Rightarrow\ \{s_{2n}\} \text{ e' non cresc.} \Rightarrow \lim s_{2n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} s_{2n} < +\infty$$

$\lim s_{2n} < +\infty$

Assurdo, perche' per Hp $\lim s_n = +\infty$.

$\langle 2\rangle$2. Supponiamo per assurdo che (1) diverga a $-\infty$

Consideriamo l'estratta $\{s_{2n}\}$,

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + \underbrace{a_{2n}}_{\leq 0} + \underbrace{a_{2n+1}}_{\geq 0} = s_{2n} + \underbrace{-|a_{2n}| + |a_{2n+2}|}_{\geq 0} \geq s_{2n-1}$$

$$\Rightarrow\ \{s_{2n+1}\} \text{ e' non decr.} \Rightarrow \lim s_{2n+1} = \sup_{n\in\mathbb{N}} s_{2n+1} > -\infty$$

$\lim s_{2n+1} > -\infty$

Assurdo, perche' per Hp $\lim s_n = -\infty$.

**Theorem 2.11.** *Criterio di Leibniz*

LET: (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie alternante con almeno un termine non nullo*
$\{|a_n|\}$ *non crescente*

*allora*

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \textit{la (1) converge e ,}\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S,\ \ |S - s_n| \leq |a_{n+1}|\ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| \neq 0 \Rightarrow \textit{la (1) e' oscillante}$$

**Proof**:

Come nella precedente dimostrazione:

$$s_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{a_{2n+1}}_{\geq 0} + \underbrace{a_{2n+2}}_{\leq 0} = s_{2n} + \underbrace{\underbrace{|a_{2n+1}| - |a_{2n+2}|}_{\geq 0}}_{\text{la serie } \{|a_n|\} \text{ e' non cres.}} \geq s_{2n}$$

$\Rightarrow$ $\{s_{2n}\}$ e' non decresc.

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + \underbrace{a_{2n}}_{\leq 0} + \underbrace{a_{2n+1}}_{\geq 0} = s_{2n} + \underbrace{-|a_{2n}| + |a_{2n+2}|}_{\leq 0} \leq s_{2n-1}$$

$\Rightarrow$ $\{s_{2n+1}\}$ e' non cresc.

$\langle 2 \rangle$1. Dimostriamo che $\{s_{2n}\}, \{s_{2n-1}\}$ sono separati

Ovvero, dimostriamo che

$$\forall p, q \in \mathbb{N} \; s_{2p} \leq s_{2q-1}$$

CASE: $p = q$

$$s_{2p} = s_{2p-1} + \underbrace{a_{2p}}_{\leq 0} \leq s_{2p-1} = s_{2q-1}$$

CASE: $p > q$

$$\{s_{2n+1}\} \text{ non cresc. } \Rightarrow \; s_{2q-1} \geq s_{2p-1} \geq s_{2p-1} + \underbrace{a_{2p}}_{\leq 0} = s_{2p}$$

$s_{2p} \leq s_{2q-1}$

CASE: $p < q$

$p < q \;\Leftrightarrow\; p \leq q - 1 = t$

$$\{s_{2n}\} \text{ non decresc. } \Rightarrow \; s_{2p} \leq s_{2t} \leq s_{2t} + \underbrace{a_{2t+1}}_{\geq 0} = s_{2t+1} = s_{2(q-1)+1} = s_{2q-1}$$

$s_{2p} \leq s_{2q-1}$

Ricapitolando i due insiemi sono separati, ovvero

$$S := \sup_{n \in \mathbb{N}} \{s_{2p}\} \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \{s_{2q-1}\} =: T$$

e anche

$$s_{2n} \leq S \leq T \leq s_{2n-1} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; (*)$$

$\langle 2 \rangle$2. Dimostriamo che non diverge, supponendo per assurdo che diverga a $+\infty$ e poi supponendo per assurdo che diverga a $-\infty$

Se diverge a $+\infty$, allora

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty \;\Rightarrow\; \lim_{n \to +\infty} s_{2n} = +\infty = S \leq T \quad \text{per la (*)}$$

Questo e' assurdo, perche' $T$, che e' l'inf, non puo' essere $\geq$ di $+\infty$.

Se diverge a $-\infty$, allora

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = -\infty \;\Rightarrow\; \lim_{n \to +\infty} s_{2n-1} = -\infty = T \geq S \quad \text{per la (*)}$$

Questo e' assurdo, perche' $S$, che e' il sup, non puo' essere $\leq$ di $-\infty$.

$\langle 2 \rangle$3. Dimostriamo che per $\lim_{n \to +\infty} |a_n| = 0$ la (1) converge e che

CASE: $n \in \mathbb{N}$, pari

$$s_n \leq S \leq T \leq s_{n+1}$$
$$S \leq s_{n+1} \;\Leftrightarrow\; \underbrace{S - s_n}_{\geq 0} \leq \underbrace{s_{n+1} - s_n}_{\geq 0} \;\Rightarrow\; |S - s_n| + |s_{n+1} - s_n| \geq 0$$
$$|S - s_n| \leq |s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}|$$
$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to+\infty} |a_{n+1}| = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to+\infty} |s_{n+1} - s_n| = 0$$
$$0 \leq |S - s_n| \leq |s_{n+1} - s_n| \;\Rightarrow\; \lim_{n\to+\infty} |S - s_n| = 0 \;\; [\text{thm del confronto}]$$
$$\lim_{n\to+\infty} s_n = S$$

Case: $n \in \mathbb{N}$, dispari

$$s_{n+1} \leq S \leq T \leq s_n$$
$$S \leq s_n \;\Leftrightarrow\; \underbrace{S - s_{n+1}}_{\geq 0} \leq \underbrace{s_n - s_{n+1}}_{\geq 0} \;\Rightarrow\; |S - s_{n+1}| + |s_n - s_{n+1}| \geq 0$$
$$|S - s_{n+1}| \leq |s_n - s_{n+1}| = |s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}|$$
$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to+\infty} |a_{n+1}| = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to+\infty} |s_n - s_{n+1}| = 0$$
$$0 \leq |S - s_{n+1}| \leq |s_n - s_{n+1}| \;\Rightarrow\; \lim_{n\to+\infty} |S - s_{n+1}| = 0 \;\; [\text{thm del confronto}]$$
$$\lim_{n\to+\infty} s_{n+1} = S \;\Rightarrow\; \lim_{n\to+\infty} s_n = S$$

Quindi, in entrambi i casi $s_n \to S$

□

**Example 2.3.** Per la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}, \quad x \in \mathbb{R} \;\; (1)$$

si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = \begin{cases} \text{ass. convergente} & -1 < x < 1 \\ \text{convergente} & x = -1 \\ \text{div a } +\infty & x \geq 1 \\ \nexists & x < -1 \end{cases}$$

Ovviamente per $x = 0$ converge a 0 Vediamo se e' ass. conv per $x \neq 0$, utilizzando il criterio del rapp.:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|\frac{x^n}{n+1}|}{|\frac{x^{n-1}}{n}|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{|x|^n}{n+1}}{\frac{|x|^{n-1}}{n}} = \lim_{n\to+\infty} |x| \frac{n}{n+1} = |x|$$

allora distinguiamo i vari casi:

Case: $|x| < 1 \;\Leftrightarrow\; -1 < x < 1$
la serie dei valori assoluti converge, quindi la (1) e' ass. conv., e quindi anche convergente.

Case: $x > 1$

Criterio del rapporto sulla (1):

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{x^n}{n+1}}{\frac{x^{n-1}}{n}} = x > 1$$

quindi la (1) diverge a $+\infty$

CASE: $x = 1$

Si ha la serie armonica, e quindi la (1) diverge a $+\infty$

CASE: $x = -1$

e' a segni alterni, e per il criterio di Leibniz:

$$\lim_{n\to+\infty} |\frac{(-1)^n}{n+1}| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

quindi e' convergente.

CASE: $x < -1$

e' sempre a segni alterni. Determiniamo la monotonia di

$$\left\{\left|\frac{x^{n-1}}{n}\right|\right\} = \left\{\frac{|x|^{n-1}}{n}\right\}$$

per poi applicare il thm [2.10,pg.24]

$$\frac{|x|^n}{n+1} <> \frac{|x|^{n-1}}{n}$$

$$n|x|^n <> (n+1)|x|^{n-1}$$

$$|x| <> \frac{n+1}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1 < \lim_{n\to+\infty} |x| = |x| = -x \quad [\text{per Hp } x < -1]$$

$$\exists v \in \mathbb{N} : \forall n > v \ \frac{n+1}{n} < |x| \quad [\text{perm del segno}]$$

$$|x| > \frac{n+1}{n} \ \Leftrightarrow \ \frac{|x|^n}{n+1} > \frac{|x|^{n-1}}{n}$$

ovvero la serie e' non decrescente. Per il thm [2.10,pg.24], la serie (1) e' oscillante.

**Example 2.4.** Consideriamo

$$a_{2n-1} = \frac{1}{n}, \ a_{2n} = -\log\frac{n+1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \log\frac{2}{1} + \frac{1}{2} - \log\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \log\frac{n}{n-1} + \frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}$$

⟨1⟩1. Dim che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = \lim_{n\to+\infty} -\log\frac{n+1}{n} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

⟨1⟩2. Dim che $\{|a_n|\}$ e' non crescente

Sia

$$\varphi(x) = \log x : [n, n+1] \longrightarrow \mathbb{N}$$

per il teorema di lagrange

$$\exists c \in [n, n+1]: \ f'(c) = \frac{f(n+1) - f(n)}{n+1-n} = \log \frac{n+1}{n} = f'(c) = \frac{1}{c}$$

$$n \leq c \leq n+1 \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{n} \geq \frac{1}{c} \geq \frac{1}{n+1} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{1}{n+1} \leq \log \frac{n+1}{n} \leq \frac{1}{n} \ \Leftrightarrow \ |a_{2(n+1)-1}| \leq |a_{2n}| \leq |a_{2n-1}|$$

$|a_{2n+1}| \leq |a_{2n}| \leq |a_{2n-1}| \ \forall n \in \mathbb{N}_0$

cio' implica che ogni termine e' $\leq$ del precedente.

$\langle 1 \rangle$3. Q.E.D.

Abbiamo visto che

$$\lim_{n \to +\infty} |a_n| = 0$$

e che $\{|a_n|\}$ e' non cresc., allora per il criterio di Leibniz, la serie converge.

La somma di questa serie viene chiamata costante di Eulero-Mascheroni.

## 2.21 Costante di Eulero-Mascheroni

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

**Proof**:

$\langle 1 \rangle$1. Dimostriamo che $\gamma \in \mathbb{R}$

Consideriamo la serie dell'esempio [2.4,pg.27], si ha:

$$s_{2n-1} = 1 - \log \frac{2}{1} + \frac{1}{2} - \log \frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \log \frac{n}{n-1} + \frac{1}{n} =$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \left(\log \frac{2}{1} + \log \frac{3}{2} + \cdots + \log \frac{n}{n-1}\right) =$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - (\log 2 + \log 3 - \log 2 + \log 4 - \log 3 + \cdots + \log n - \log(n-1)) =$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

La serie dell'esempio converge, e quindi $\gamma \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right) = \Gamma \in \mathbb{R}$$

**Example 2.5.** Un'applicazione:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log n}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} =$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log n - (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) + (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} =$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \underbrace{\frac{\overbrace{(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) - \log n}^{\longrightarrow \gamma}}{\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}_{\longrightarrow +\infty}}}_{\longrightarrow 0}\right) = 1$$

## 2.22 Serie prodotto

Abbiamo due serie

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

da queste definiamo

$$(3)\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

dove

$$c_n = \sum_{h=1}^{n} a_h b_{n-h+1} = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$$

La (3) e' chiamata serie prodotto secondo Cauchy.

**Theorem 2.12.** *di Mertens.*
*Se la* $(1),(2)$ *convergono rispettivamente con somma* $A, B$ *e almeno una delle due e' assolutamente convergente, allora la* $(3)$ *converge con somma* $C = AB$.

**Proof**:
⟨1⟩1. Portiamo un esempio che mostra che senza l'ipotesi di ass. conv. di almeno una delle serie iniziali, il teorema non vale

Consideriamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \quad (*)$$

⟨2⟩1. La $(*)$ converge

Usiamo il criterio di Leibniz: la successione

$$\{|a_n|\} = \{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$$

e' decrescente, e

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

quindi, per Leibniz, la $(*)$ converge.

Consideriamo adesso la serie prodotto della $(*)$ per se stessa

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad (**)$$

$$c_n = \sum_{h=1}^{n} a_h a_{n-h+1} = \sum_{h=1}^{n} \frac{(-1)^{h-1}}{\sqrt{h}} \frac{(-1)^{n-h+1-1}}{\sqrt{n-h+1}} =$$

$$(-1)^{n-1} \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{h}\sqrt{n-h+1}}$$

⟨2⟩2. Studiamo i punti di minimo e massimo assoluti della funzione $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{n-x+1} : [1,n] \longrightarrow \mathbb{R}$

Usiamo la tecnica dei tre insiemi[4]:
$X_1 = \{1, n\}$ gli estremi della funzione
$X_2 = \{x \in [1, n] \mid \nexists f'(x)\} = \emptyset$ poiche' $\exists f'(x)\ \forall x \in [1, n]$
$X_3 = \{x \in [1, n] \mid f'(x) = 0\}$

$$D\left[f(x)\right] = D\left[\sqrt{nx - x^2 + x}\right] = \frac{n - 2x + 1}{2\sqrt{(xn - x^2 + x)}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow n - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{n+1}{2}$$

$X_3 = \{\frac{n+1}{2}\}$

$$f(1) = \sqrt{n}, \quad f(n) = \sqrt{n}, \quad f\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{n+1}{2}$$

$$f(1) = f(n) \leq f\left(\frac{n+1}{2}\right) \Leftrightarrow \sqrt{n} \leq \frac{n+1}{2} \Leftrightarrow n \leq \frac{n^2+1+2n}{4} \Leftrightarrow$$

$$4n \leq n^2 + 1 + 2n \Leftrightarrow 0 \leq n^2 + 1 - 2n \Leftrightarrow 2n \leq n^2 + 1 \Leftrightarrow 2 \leq n + \frac{1}{n}$$

Quindi $1, n$ sono punti di minimo e $\frac{n+1}{2}$ e' un punto di massimo
$\langle 2 \rangle 3.$ Q.E.D.
Da cio' che abbiamo visto

$$f(x) \leq \frac{n+1}{2}\ \forall x \in [1, n] \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} \geq \frac{2}{n+1}$$

$$c_n = (-1)^{n-1} \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{h}\sqrt{n-h+1}} = (-1)^{n-1} \sum_{h=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{f(h)}}_{\geq \frac{2}{n+1}}$$

$$\Rightarrow |c_n| = \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{f(h)} \geq \frac{2n}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} |c_n| \geq \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{n+1} = 2 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} |c_n| \neq 0$$

quindi per il criterio di Leibniz la serie $(**)$ e' oscillante, percio' non converge.

$\square$

**Theorem 2.13.** *Una versione piu' forte del thm di Mertens: se la* (1) *e* (2) *sono ass. conv. allora la* (3) *e' ass. convergente:*

**Proof**:
Per Hp

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = A \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = B \in \mathbb{R}$$

[4] questa tecnica consiste nel confrontare i numeri dell'insieme $\{f(x) \mid x \in X_1 \cup X_2 \cup X_3\}$

dobbiamo provare che $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = C \in \mathbb{R}$; studiamo la sua somma parziale:
$t_n = \sum_{i=1}^{n} |c_i| = \sum_{i=1}^{n} \Big| \sum_{h=1}^{i} a_h b_{i-h+1} \Big| =$
$|a_1 b_1| + |a_1 b_2 + a_2 b_1| + \cdots + |a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1| \leq$
$\leq |a_1||b_1| + |a_1||b_2| + |a_2||b_1| + \cdots + |a_1||b_n| + |a_2||b_{n-1}| + \cdots + |a_n||b_1| =$
$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{i} |a_h||b_{i-h+1}| =$
$= |a_1|(\underbrace{|b_1| + \cdots + |b_n|}_{\leq B}) + |a_2|(\underbrace{|b_1| + \cdots + |b_{n-1}|}_{\leq B}) + \cdots + |a_n| \underbrace{|b_1|}_{\leq B} \leq B(\underbrace{|a_1| + \cdots + |a_n|}_{\leq A}) \leq AB$
$t_n \leq AB$
Quindi, la successione $\{t_n\}$ e' limitata, ed essendo a termini non negativi, converge.

$\square$

## 2.23 Serie telescopica

La successione $\{a_n\}$ e la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$$

hanno lo stesso carattere. Questo deriva semplicemente, dal fatto che

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} (a_{n+1} - a_n)$$

e' una serie telescopica, cioe'

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} (a_{n+1} - a_n) = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1$$

## 2.24 Taylor e Mac-Laurin

**Example 2.6.** Studiamo la sviluppabilita' in serie di taylor di centro $x_0 = 0$

$$f(x) = \log(1 + x) : ]-1, +1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \in C^{\infty}(]-1:+\infty[)$$
$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$
$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$$
$$f'''(x) = \frac{2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3}$$
$$D^4\left[f(x)\right] = \frac{2(1+x)^4 - 4(1+x)^3 2(1+x)}{(1+x)^8} = \frac{-6(1+x)^4}{(1+x)^8} = \frac{-6}{(1+x)^4}$$
$$D^5\left[f(x)\right] = \frac{24}{(x+1)^5}$$
$$D^6\left[f(x)\right] = \frac{-120}{(x+1)^6}$$
$$\vdots$$
$$D^n\left[f(x)\right] = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

Ovvero, vogliamo provare che $\forall x \in ]-1,1]$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{D^n\left[f(0)\right]}{n!}x^n + \dots \\
f(x) &= 0 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!x^n}{n!} + \dots = \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \dots = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \quad \forall x \in ]-1,1]
\end{aligned}$$

Osserviamo che fissato un $-1 < x < 1$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} \quad \text{serie geom di ragione } (-x)$$

che, liberando $x$ in $]-1,1]$ si puo' intendere come una serie di potenze di centro 0:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}x^{n-1} \quad (1)$$

applichiamo allora il corollario di Cauchy-Hadamad:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1 =: l$$

quindi, il raggio di convergenza e' $\frac{1}{l} = 1$. Con questa informazione possiamo dire che in $]-1,1[$ la (1) converge assolutamente, anzi e' tot. conv in ogni intervallo $[a,b] \subseteq ]-1,1[$. Possiamo applicare l'integrazione di serie all'intervallo

$[0, b]$ e $[a, 0]$:

$$\int_{[0,b]} \frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,b]} (-1)^{n-1} x^{n-1}$$
$$\log(1+b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} b^n \quad \forall b \in [0,1]$$
$$\int_{[a,0]} \frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[a,0]} (-1)^{n-1} x^{n-1}$$
$$\log(1+a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} a^n \quad \forall a \in [-1,0]$$

quindi

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \forall x \in ]-1,1[ \ \ (2)$$

La (2) e' una serie di potenze, cerchiamo allora di applicare il teorema di Abel: prima di tutto vediamo se la (2) converge o meno negli estremi.
L'$H$ di (2) e':

$$H = \{h \geq 0 \mid \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| h^{n-1} \quad \text{converge}\}$$

Utilizzando il criterio del rapporto, si vede che $\sup H = r = 1$. Nota [5]. Quindi, la (2) converge in $]-1,1[$ e non converge in $\mathbb{R} \setminus [-1,1]$. Per quanto riguarda gli estremi, la (2) si comporta cosi':

$$x = 1$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ converge (visto in exp [2.1,pg.10])}$$
$$x = -1$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} = -\infty$$

A questo punto, per il thm di Abel, possiamo dire che la (2) e' uniformemente convergente in ogni intervallo del tipo $[a, 1]$ con $-1 < a < 1$.
Quindi, in questi intervalli, possiamo applicare il thm sulla continuita' della funzione limite: sia $S(x)$ la somma della serie, abbiamo fin'ora visto che

$$S(x) = \begin{cases} \log(1+x) & x \in ]-1,1[ \\ S(1) & x = 1 \end{cases}$$

[5] Potevamo calcolare l'r riutilizzando il corollario di Cauchy-Hadamad:

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| \left|\frac{n}{(-1)^{n-1}}\right| = \lim \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow r = 1$$

per il thm sulla continuita' della funzione limite, $S(x)$ e' continua, quindi

$$\lim_{x\to 1^-} S(x) = S(1)$$
$$\lim_{x\to 1^-} S(x) = \lim_{x\to 1^-} \log(1+x) = \log(2)$$
$$S(1) = \log(2) = \log(1+1)$$

In definitiva, abbiamo che

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \forall x \in ]-1,1]$$

## 2.25 Irrazionalita' di $e$

Abbiamo visto in analisiII.pdf che

$$e^x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

percio'

$$e = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \qquad (*)$$

Dimostriamo l'irrazionalita' di $e$.
$\langle 1 \rangle 1.$ Fissato un $n \in \mathbb{N}$, proviamo le seguenti disuguaglianze:

$$0 < e - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k-1)!} \qquad (1)$$
$$e - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k-1)!} < \frac{1}{n!n} \qquad (2)$$

$\langle 2 \rangle 1.$ Partiamo dalla (1)
La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!} \qquad (3)$$

e' la serie resto di posto $n+1$ della $(*)$. Per quanto visto in [2.6,pg.14], e poiche' la $(*)$ converge, anche la (3) converge e inoltre

$S =$ somma della $(*) = e$

$s_n =$ somma parziale della (*)

$T =$ somma della (3) $= S - s_{n+1} = e - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k-1)!}$

(3) a termini positivi $\Rightarrow T > 0 \Leftrightarrow 0 < e - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k-1)!} \Leftrightarrow (1)$

$\langle 2 \rangle 2.$ Dimostriamo l'uguaglianza (2)

Consideriamo la seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!(n+1)^{k-1}} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} \right)^{k-1} \qquad (4)$$

Se escludiamo il fattore $\frac{1}{(n+1)!}$, la (4) diventa una serie geometrica di ragione $\frac{1}{n+1} < 1$, quindi converge a $\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}$.

Moltiplicando per il fattore otteniamo:

$$\frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} \right)^{k-1} = \frac{1}{(n+1)! \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)} = \frac{1}{n!n}$$

⟨3⟩1. Confrontiamo la (3) con la (4):

si dimostra per induzione che:

$$\frac{1}{(n+k)!} \leq \frac{1}{(n+1)!(n+1)^{k-1}} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

infatti,

$k = 1 :$ $$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

supp. vera per $k$.

$k + 1 :$

per Hp induttiva si ha:

$$\frac{1}{(n+k)!} \leq \frac{1}{(n+1)!(n+1)^{k-1}} < \frac{1}{(n+1)!(n+1)^{k-1}} + \frac{1}{(n+1)!(n+1)^{k-1}} \frac{k}{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{(n+k)!} < \frac{1}{(n+1)!(n+1)^{k-1}} (1 + \frac{k}{n+1}) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{(n+k)!} < \frac{1}{(n+1)!(n+1)^{k-1}} (\frac{n+1}{n+1} + \frac{k}{n+1}) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{(n+k)!} < \frac{1}{(n+1)!(n+1)^{k-1}} (\frac{n+k+1}{n+1}) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{dividendo per } n+k+1}$$

$$\frac{1}{(n+k+1)(n+k)!} < \frac{1}{(n+1)!(n+1)^{k-1}} (\frac{1}{n+1}) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{(n+k+1)!} < \frac{1}{(n+1)!(n+1)^{k}}$$

Quindi, per il teorema del confronto, la somma della (3) e' $\leq$ di quella della (4), ovvero

$$e - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k-1)!} \leq \frac{1}{n!n}$$

Quindi la disuguaglianza (2) e' dimostrata.

⟨1⟩2. Q.E.D.

Supponiamo per assurdo che $e = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}, p \neq q, q > 1$. Per la (1) e (2), fissando $n = q$, si ha:

$0 < \frac{p}{q} - \sum_{k=1}^{q+1} \frac{1}{(k-1)!} < \frac{1}{q!q}$

moltiplichiamo ambo i membri per $q!$:

$0 < \frac{p}{q}q! - q!\sum_{k=1}^{q+1} \frac{1}{(k-1)!} < \frac{1}{q}$

$0 < \underbrace{p(q-1)! - \sum_{k=1}^{q+1} \frac{q!}{(k-1)!}}_{M} < \frac{1}{q} \qquad (0')$

$$\sum_{k=1}^{q+1} \frac{q!}{(k-1)!} = \frac{q!}{1} + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \dots + \frac{q!}{q!} = q! + q! + q(q-1)\dots 3 + \dots + 1 \in \mathbb{N} \qquad (1')$$

$q > 1, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N} \Rightarrow p(q-1)! \in \mathbb{N} \qquad (2')$

$0 < p(q-1)! - \sum_{k=1}^{q+1} \frac{q!}{(k-1)!} \Leftrightarrow p(q-1)! > \sum_{k=1}^{q+1} \frac{q!}{(k-1)!} \qquad (3')$

$(1'), (2'), (3') \Rightarrow M \in \mathbb{N}$

$(0') \Rightarrow M < \frac{1}{q} < 1$ assurdo contro $M \in \mathbb{N}$

## 2.26 Formulario

Fattoriale

- $$n!! = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ \frac{n!}{(n-1)!!} & n \neq 1 \end{cases}$$

  Ad esempio,

  $$8!! = 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$$
  $$9!! = 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3$$

- $n! = n!!(n-1)!!$
- $(2n)!! = 2^n n!$
- $(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{(2n)!!} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$

Limiti e serie di taylor:

- $\lim \frac{x^n}{n!} = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$
- $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$
- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots,$

- $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \forall x \in ]-1, 1]$
- $\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots,$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots,$
- $\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \qquad \forall x \in [-1, 1]1$

# 3 Spazi metrici

**Definition 3.1.** distanza tra due insiemi $X, Y$ di $(S, d)$:

$$d(X, Y) := \inf \{d(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$$

$$X, Y \text{ sono asintotici } \Leftrightarrow X \cap Y = \emptyset,\ d(X, Y) = 0$$

**Theorem 3.1.**
*$X$ sequenzialmente compatto, $Y$ chiuso,* $d(X, Y) = 0 \Rightarrow X \cap Y \neq \emptyset$

**Proof**:

$$d(X, Y) = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{II prop. inf}} \forall \varepsilon = \frac{1}{n} > 0\ \exists x_n \in X,\ \exists y_n \in Y: \ d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \qquad (1)$$

$\{x_n\} \subseteq X$, $X$ seq. comp. $\Rightarrow \exists \{x_{k_n}\}: \ x_{k_n} \longrightarrow x^* \in X \qquad (2)$

$y_{k_n} \longrightarrow x^*$ infatti,

$$0 \leq d(y_{k_n}, x^*) \leq d(y_{k_n}, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x^*) \underbrace{<}_{(1)} \underbrace{\frac{1}{k_n}}_{\to 0} + \underbrace{d(x_{k_n}, x^*)}_{\to 0\ (2)}$$

$$\Rightarrow d(y_{k_n}, x^*) \to 0 \Leftrightarrow y_{k_n} \to x^*$$

$y_{k_n} \to x^* \Rightarrow x^* \in \overline{Y} \underbrace{=}_{\text{Y e' chiuso}} Y$

$x^* \in X \cap Y$

□

**Corollary 3.2.**

$$X\, chiuso\ ,\ d(\{y\}, X) = 0 \Rightarrow y \in X$$

**Proof**:
$\{y\}$ e' seq. compatto, $X$ e' chiuso, $d(X, Y) = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{thm prec.}} \{y\} \cap X \neq \emptyset \Leftrightarrow y \in X$

**Example 3.2.** Consideriamo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{x}\} = \{(x, \frac{1}{x}) \mid x \in \mathbb{R}\}$, ovvero l'iperbole equilatera. $B = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, ovvero l'asse $x$. $A, B$ sono asintotici, infatti, $A \cap B = 0$,

$$d((n, \frac{1}{n}), (n, 0)) = \sqrt{(n-n)^2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n} \to 0$$

**Proposition 3.3.** *Disuguaglianza triangolare per distanza punto-insieme*
*Dato lo spazio metrico* $(S, d)$*,* $X \subseteq S$*,* $x, y \in S$*, si ha*

$$d(x, S) \leq d(x, y) + d(y, S)$$

*dove con* $d(x, S)$ *si intende* $d([x], S)$*.*

*Proof.*

$d(y, S) = \inf \{d(y, s) \mid s \in S\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists s_\varepsilon \in S : \ d(y, s_\varepsilon) - \varepsilon < d(y, S) \ \ (1)$
$d(x, S) = \inf \{d(x, s) \mid s \in S\} \leq d(x, s_\varepsilon) \underbrace{\leq}_{\text{disug. triang.}} d(x, y) + d(y, s_\varepsilon) \underbrace{<}_{(1)} d(x, y) + d(y, S) + \varepsilon$

$d(x, S) < d(x, y) + d(y, S) + \varepsilon \ \ \forall \varepsilon > 0$

e prendendo i limiti per $\varepsilon \to 0$, si ha:

$$d(x, S) \leq d(x, y) + d(y, S)$$

□

# Index