Impossibile liberarsi di Heisenberg

Marcello Colozzo

Ricapitolando: David Bohm risolve l'equazione di Scrödinger utilizzando un altro metodo. Più specificatamente, l'approccio "canonico" consiste nell'applicare il metodo operatoriale. Applicando, poi, l'analisi di Fourier alla soluzione $\psi(x,t)$ (per semplicità stiamo considerando il caso unidimensionale), si perviene alla relazione di indeterminazione

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{1}$$

a patto di interpretare

$$|\psi(x,t)|^2 = \rho(x,t)$$

come la densità di probabilità di trovare al tempo t la particella in $[x, x+dx]$. In linea di principio, l'algoritmo di soluzione utilizzato da Bohm deve necessariamente riprodurre la predetta relazione di indeterminazione. Nel caso contrario, ci troviamo con due procedimenti che restituiscono risultati differenti. Per essere più precisi, riscriviamo le equazioni di Bohm nel caso unidimensionale:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + V_{eff}(x,t) = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial x}\right) = 0 \end{cases}, \tag{2}$$

dove

$$V_{eff}(x,t) = V(x) + Q(x,t)$$

è il potenziale effettivo, essendo

$$Q(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}$$

Notiamo subito che la presenza di $Q(x,t)$ rende l'hamiltoniana effettiva:

$$H_{eff}(x,p,t) = H(x,p) + U(x,t),$$

dipendente esplicitamente dal tempo. Ciò implica che

$$S(x,t) \neq W(x) - Et,$$

ma qualcosa di "molto più complicato". Per inciso, il sistema non conserva l'energia meccanica E, e questo è un buon risultato poiché, in generale, nella soluzione canonica la ψ è una sovrapposizione lineare di autostati dell'energia, onde quest'ultima non è definita. Per quanto visto in precedenza, il problema del moto della particella quantistica è risolto dal problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} = s(t,x) \\ x(0) = x_0 \end{cases},$$

dove

$$s(t,x) \overset{def}{=} \frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial x}$$

Ma non è assolutamente detto che tale funzione verifichi le ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz, per cui il predetto problema potrebbe avere più soluzioni, il rende indeterminata la traiettoria della particella.