Battaglia navale

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Il testo del seguente esercizio è tratto dall'*Halliday-Resnick*. A seguire la soluzione da noi proposta.

Durante la battaglia di Tarawa, nella seconda guerra mondiale, una nave da guerra sparò proiettili sulla base giapponese di Betio da una distanza di 64 km. Supposta trascurabile la resistenza dell'aria e supposto che l'angolo di alzo fosse regolato per la massima gittata:

1. i proiettili raggiunsero la massima altezza compresa tra:

   a) 0 e 0.8 km.

   b) 0.8 e 3.2 km.

   c) 3.2 e 13 km.

   d) 8.0 e 13 km.

   e) 13 km e 20 km.

2. Quale doveva essere la velocità approssimativa di sparo?

   a) 8000 m / s.

   b) 800 m / s.

   c) 80 m / s.

   d) 8 m / s.

Soluzione

Il problema fornisce come dato certo l'angolo di alzo $\theta = \pi/4$ e la distanza $D = 6.4 \cdot 10^4$ m. Tuttavia quest'ultima non è la gittata, nel senso che ci aspettiamo

$$D - \delta \leq R \leq D + \delta, \tag{1}$$

dove R è la gittata, mentre $0 < \delta \ll D$. Abbiamo:

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta \underset{\theta=\frac{\pi}{4}}{=} \frac{v_0^2}{g}, \tag{2}$$

onde

$$D - \delta \leq \frac{v_0^2}{g} \leq D + \delta, \tag{3}$$

da cui ricaviamo

$$v_{0,\min}(\delta) \leq v_0 \leq v_{0,\max}(\delta),$$

avendo definito le funzioni della variabile δ:

$$v_{0,\min}(\delta) = \sqrt{g(D-\delta)}, \quad v_{0,\max}(\delta) = \sqrt{g(D+\delta)} \tag{4}$$

Per eseguire uno studio di funzione, supponiamo $0 \leq \delta \leq D$, per cui otteniamo il grafico di fig. 1, da cui vediamo che

$$0 \leq \delta \leq 5 \cdot 10^3 \text{ m} \Longrightarrow 760.782 \text{ m / s} \leq v_0 \leq 822.733 \text{ m / s} \tag{5}$$

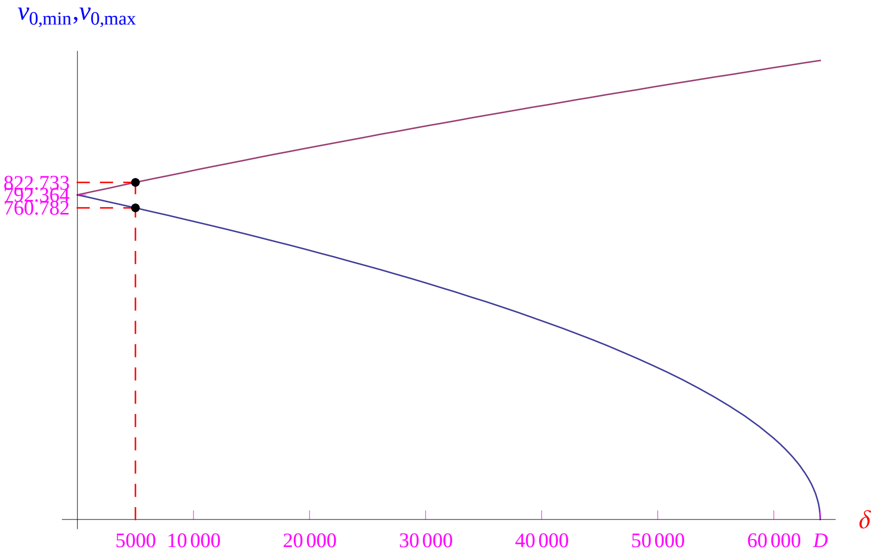

Figura 1: Andamento delle velocità $v_{0,\text{min}}\,(\delta)$, $v_{0,\text{max}}\,(\delta)$ espresse in m / s.

Uno scarto di 5 km sembra un buon limite superiore per δ, quindi la risposta corretta al quesito 2 è la (b).

Per rispondere al quesito 2, scriviamo l'equazione che fornisce la massima altezza:

$$y_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \theta \underset{\theta = \frac{\pi}{4}}{=} \frac{v_0^2}{4g}$$

Per v_0 soggetta alla limitazione (5) ovvero per $0 \leq \delta \leq 5 \cdot 10^3$ m, si ha

$$1.6 \cdot 10^4 \,\text{m} \leq y_{\text{max}} \leq 1.72 \cdot 10^4 \,\text{m},$$

da cui segue che la risposta giusta è la (b).