Base dello spazio delle matrici quadrate di ordine n

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Nello spazio vettoriale $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,n)$ delle matrici quadrate di ordine n sui reali, si consideri il sistema di vettori:

$$S = \{E_{ik} = (e_{ik})\}, \quad i,k = 1,2,...,n, \tag{1}$$

dove per assegnati $i,k \in \{1,2,...,n\}$

$$e_{jh} = \begin{cases} 1, & \text{se } (j,h) = (i,k) \\ 0, & \text{se } (j,h) \neq (i,k) \end{cases}, \tag{2}$$

cosicché

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$
$$..., E_{1n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix},$$
$$..., E_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{nn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Scriviamo:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{ik}E_{ik} = 0_{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,n)}, \tag{4}$$

dove $0_{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,n)}$ è il vettore nullo di $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,n)$, i.e. la matrice nulla di ordine n:

$$0_{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,n)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

per cui eseguendo la doppia sommatoria a primo membro della (4):

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & ... & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & ... & \lambda_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & ... & \lambda_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \lambda_{ik} = 0, \quad \forall i,k \in \{1,2,...,n\} \tag{6}$$

Cioè il sistema (1) è linearmente indipendente. Inoltre:

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}E_{ik}, \quad \forall A = (a_{ik}) \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,n)$$

Segue che il predetto sistema di vettori è una base di $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,n)$, e lo ridefiniamo in

$$\mathcal{B} = \{E_{ik} = (e_{ik})\}, \quad i,k = 1,2,...,n \tag{7}$$

In particolare è la base canonica di $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,n)$. La dimensione di tale spazio è

$$\dim \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,n) = n^2 \tag{8}$$

Nel caso particolare $n = 2$:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ E_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \ E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$