Esercizio di Analisi 1

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Esercizio 1 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x - \tan\frac{x}{2}}{1-\cos x + \tan\frac{x}{2}}} \tag{1}$$

Soluzione.

Per rimuovere la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ dividiamo numeratore e denominatore per x, manipolando poi le singole frazioni:

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos x}{x} - \frac{\tan(x/2)}{x/2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1-\cos x}{x} + \frac{\tan(x/2)}{x/2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}}_{=0} - \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x/2)}{x/2}}_{=1}}{\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}}_{=0} + \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x/2)}{x/2}}_{=1}} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

Più lentamente, utilizziamo la formula di duplicazione del coseno:

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} \Longrightarrow 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}, \tag{2}$$

per cui

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2} - \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{2\sin^2\frac{x}{2} + \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{\cos\frac{x}{2}}}{2\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{\cos\frac{x}{2}}} \\ &= \frac{2\cdot 0 - 1}{2\cdot 0 + 1} = -1\end{aligned} \tag{3}$$

Un procedimento ancora più laborioso consiste nell'utilizzare le formule di bisezione per la tangente

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x} \tag{4}$$

Ne segue

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x - \frac{\sin x}{1+\cos x}}{1-\cos x + \frac{\sin x}{1+\cos x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x - \sin x}{1-\cos^2 x + \sin x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - \sin x}{\sin^2 x + \sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} = -1\end{aligned} \tag{5}$$