Appunti di Analisi 1

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

1 Funzioni divergenti in modulo

Definizione 1 *Si dice che la funzione $f(x)$ è* **divergente in modulo** *per $x \to x_0$, se*

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty \tag{1}$$

Una locuzione alternativa è: $f(x)$ è **infinita** *in x_0 e il punto x_0 è un* **punto di infinito** *per la funzione medesima.*

Sussiste la seguente proposizione:

Proposizione 2 *Se la funzione f è divergente in x_0, allora f è ivi divergente in modulo:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty \tag{2}$$

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, supponiamo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Dalla definizione di divergenza positiva:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X, \quad 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow f(x) > \varepsilon$$

D'altra parte

$$|f(x)| \geq f(x) > \varepsilon,$$

da cui l'asserto. ■

La proposizione appena dimostrata non è invertibile:

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty \not\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

Per essere più precisi, la proposizione è invertibile solo se la funzione ha definitivamente segno costante intorno a x_0. Come controesempio, la funzione $f(x) = 1/x$ è divergente in modulo in $x = 0$, ma è ivi non regolare giacché intorno a $x = 0$ assume sia valori positivi che negativi (fig. 1), mentre $|f(x)|$ è divergente. Ne concludiamo:

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{1}{x} \right| = +\infty, \quad \nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

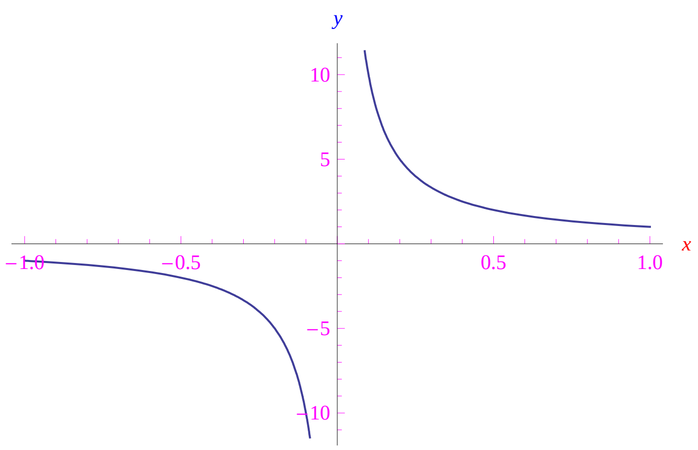

Figura 1: Diagramma cartesiano della funzione $f(x) = 1/x$.