Appunti di Analisi 1

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

0.1 Convergenza in modulo

Definizione 1 *Si dice che la funzione $f(x)$* **converge in modulo** *per $x \to x_0$, se*

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \ell \tag{1}$$

Sussiste la seguente proposizione:

Proposizione 2 *Se la funzione $f(x)$ converge a $l \in \mathbb{R}$ per $x \to x_0$, allora converge in modulo:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} |f(x)| = |l| \tag{2}$$

Dimostrazione.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Longrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X, \quad 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Per una nota proprietà del valore assoluto:

$$||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l| < \varepsilon \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$$

■

La (2) non è invertibile, ad eccezione del caso $l = 0$. Cioè:

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |l| \neq 0 \nRightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

Come controesempio consideriamo la funzione:

$$f(x) = (-1)^{[x]} \frac{|x|}{x}, \tag{3}$$

rammentando che $[x]$ denota la parte intera del numero reale x. Vediamo innanzitutto che la funzione non è definita in $x = 0$. Inoltre, è dispari per cui possiamo limitarci a $(0, +\infty)$:

$$\begin{aligned}
x \in (0, 1] &\Longrightarrow f(x) = +1 \\
x \in (1, 2] &\Longrightarrow f(x) = -1 \\
x \in (2, 3] &\Longrightarrow f(x) = +1 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

da cui il diagramma tracciato in fig. 1.

Ne segue che la funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, e dal momento che ogni elemento di Z è punto di accumulazione, possiamo studiare il comportamento della funzione in ogni intorno dei predetti elementi, ottenendo:

$$\nexists \lim_{x\to k} (-1)^{[x]} \frac{|x|}{x}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

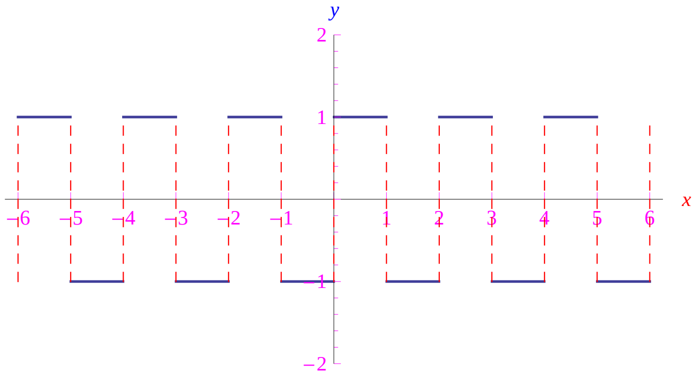

Figura 1: Diagramma cartesiano della funzione (3).

Anche $+\infty$ e $-\infty$ sono punti di accumulazione per X, e siccome in ogni intorno di $+\infty$ $[-\infty]$ la funzione assume i valori $+1$ e -1 si ha che la funzione è non regolare:

$$\nexists \lim_{x\to\pm\infty} (-1)^{[x]} \frac{|x|}{x}$$

Prendiamo ora il valore assoluto

$$|f(x)| = \left|\frac{|x|}{x}\right| = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

per cui

$$\lim_{x\to k} |f(x)| = 1, \ \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} |f(x)| = 1$$