Esercizio di Analisi 1

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Esercizio 1 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin 2x-\cos 2x}{1-\sin 2x+\cos 2x}} \tag{1}$$

Soluzione

Metodo 1

Possiamo rimuovere l'evidente forma indeterminata $\frac{0}{0}$ eseguendo il cambio di variabile $t=\frac{\pi}{4}-x$, cosicché

$$\sin 2x = \cos 2t, \quad \cos 2x = \sin 2t$$

Ne segue

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos 2t-\sin 2t}{1-\cos 2t+\sin 2t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1-\cos 2t}{2t}-\frac{\sin 2t}{2t}}{\frac{1-\cos 2t}{2t}+\frac{\sin 2t}{2t}} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

Metodo 2

Utilizzando la formula di duplicazione $\cos 2x = 1-2\sin^2 x$:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-2\sin x\cos x-1+2\sin^2 x}{1-2\sin x\cos x+1-2\sin^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin^2 x-2\sin x\cos x}{2-2\sin x\cos x-2\sin^2 x} \\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x\left(\sin x-\cos x\right)}{1-\sin x\left(\sin x+\cos x\right)}\end{aligned} \tag{2}$$

Scriviamo $1=\sin^2 x+\cos^2 x$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x\left(\sin x-\cos x\right)}{\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\left(\sin x+\cos x\right)} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x\left(\sin x-\cos x\right)}{\cos^2 x-\sin x\cos x} \\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x\left(\sin x-\cos x\right)}{\cos x\left(\cos x-\sin x\right)} \\ &= -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan x = -1\end{aligned} \tag{3}$$

Metodo 3

Eseguiamo il cambio di variabile $\xi = 2x$

$$\lambda = \lim_{\xi\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin\xi-\cos\xi}{1-\sin\xi+\cos\xi} \tag{4}$$

Utilizziamo le formule parametriche

$$\sin\xi = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos\xi = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tag{5}$$

dove

$$t = \tan\frac{\xi}{2} \xrightarrow[\xi\to\frac{\pi}{2}]{} \tan\frac{\pi}{4} = 1, \tag{6}$$

per cui

$$\lambda = \lim_{t\to 1} \frac{1-\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = -\lim_{t\to 1} t = -1 \tag{7}$$