Appunti di Analisi 1

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

1 Non regolarità della funzione signum

Ricoridiamo che la **funzione signum** $f(x) = sgnx$ è così definita:

$$sgnx = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Mostriamo che tale funzione non converge ad alcun limite per $x \to 0$. Ad esempio, se fosse $l = 0$, comunque prendiamo un intorno $J_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)$, esiste in corrispondenza un intorno $I_{\delta_\varepsilon}(0) = (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon)$ tale che per ogni $x \in I_{\delta_\varepsilon}(0) - \{0\}$ riesce $sgnx \in J_\varepsilon(0)$. E ciò deve verificarsi per ogni $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo. Di contro, basta assumere $\varepsilon \in (0,1)$ per violare tale proprietà, avendosi:

$$\forall J_{\varepsilon \in (0,1)}(0), \ \exists I_{\delta_\varepsilon}(0) = (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon) \mid x \in I_{\delta_\varepsilon}(0) - \{0\} \Longrightarrow sgnx \notin J_{\varepsilon \in (0,1)}(0),$$

come mostrato in fig. 1.

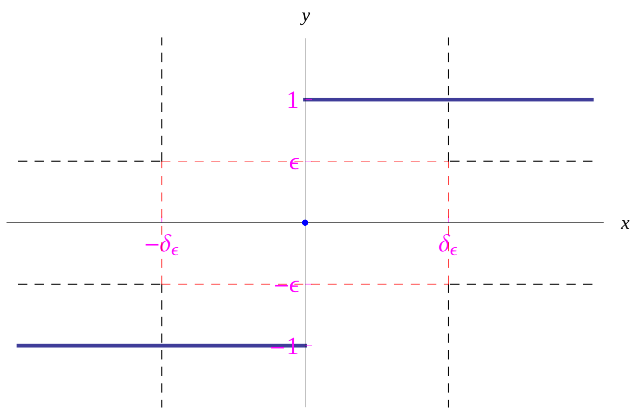

Figura 1: Diagramma cartesiano della funzione $f(x) = sgnx$. Comunque prendiamo un intorno $J_{\varepsilon \in (0,1)}(0)$ di $f(0) = 0$, è possibile associare ad esso intorni $I_{\delta_\varepsilon}(0)$ tali che $x \in I_{\delta_\varepsilon}(0) - \{0\} \Longrightarrow f(x) \notin J_{\varepsilon \in (0,1)}(0)$.

Esempio 1 *Più precisamente:*

$$\begin{aligned} x \in (-\delta_\varepsilon, 0) &\Longrightarrow sgnx = -1 \notin J_{\varepsilon \in (0,1)}(0) \\ x \in (0, \delta_\varepsilon) &\Longrightarrow sgnx = +1 \notin J_{\varepsilon \in (0,1)}(0) \end{aligned}$$

Possiamo ripetere il procedimento, congetturando $l = 1$*:*

$$\forall J_{\varepsilon \in (0,2)}(1), \ \nexists I_{\delta_\varepsilon}(0) = (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon) \mid x \in I_{\delta_\varepsilon}(0) - \{0\} \Longrightarrow f(x) \in J_{\varepsilon \in (0,2)}(1),$$

come mostrato in fig. 2.

Analoga conclusione se congetturiamo $\lim_{x \to 0} sgnx = -1$ *Ne consegue che la funzione* $sgnx$ *è non regolare in* $x = 0$*.*

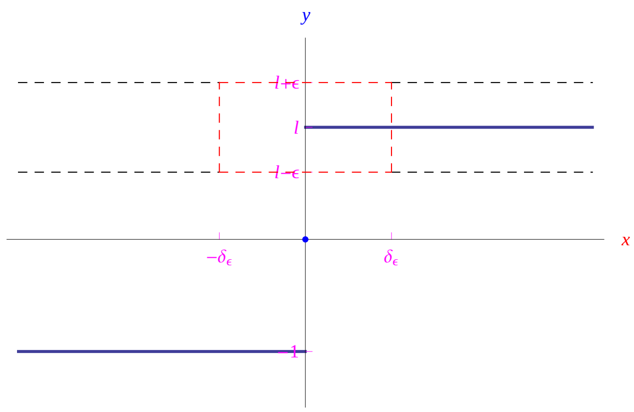

Figura 2: Comunque prendiamo un intorno $J_{\varepsilon \in (0,2)}(1)$ del punto $y = 1$, è possibile associare ad esso intorni $I_{\delta_\varepsilon}(0)$ tali che $x \in I_{\delta_\varepsilon}(0) - \{0\} \Longrightarrow f(x) \notin J_{\varepsilon \in (0,2)}(2)$.