Appunti di Analisi 1

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

1 Definizione di divergenza (parte 2)

La definizione di divergenza si estende immediatamente quando x_0 è punto di accumulazione all'infinito. Ad esempio:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \tag{1}$$

simboleggia la seguente definizione:

Definizione 1 *La funzione f è* **divergente positivamente** *per $x \to +\infty$, se:*

$$\forall J_\varepsilon = (\varepsilon, +\infty), \quad \exists I_{\delta_\varepsilon} = (\delta_\varepsilon, +\infty) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon} \Longrightarrow f(x) \in J_\varepsilon, \tag{2}$$

che equivale a:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X, \ x > \delta_\varepsilon \Longrightarrow f(x) > \varepsilon$$

La scrittura

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \tag{3}$$

è il risultato della seguente definizione:

Definizione 2 *La funzione f è* **divergente negativamente** *per $x \to +\infty$, se:*

$$J_\varepsilon = (-\infty, -\varepsilon), \quad \exists I_{\delta_\varepsilon} = (\delta_\varepsilon, +\infty) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon} \Longrightarrow f(x) \in J_\varepsilon, \tag{4}$$

equivalente a:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X, \ x > \delta_\varepsilon \Longrightarrow f(x) < -\varepsilon$$

Definizioni analoghe per $x \to -\infty$:

Definizione 3 *La funzione f è* **divergente positivamente** *per $x \to -\infty$, se:*

$$\forall J_\varepsilon = (\varepsilon, +\infty), \quad \exists I_{\delta_\varepsilon} = (-\infty, -\delta_\varepsilon) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon} \Longrightarrow f(x) \in J_\varepsilon, \tag{5}$$

equivalente a:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X, \ x < -\delta_\varepsilon \Longrightarrow f(x) > \varepsilon$$

Simbolicamente, tale proprietà è espressa da:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Definizione 4 *La funzione f è* **divergente negativamente** *per $x \to -\infty$, se:*

$$\forall J_\varepsilon = (-\infty, -\varepsilon,), \quad \exists I_{\delta_\varepsilon} = (-\infty, -\delta_\varepsilon) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon} \Longrightarrow f(x) \in J_\varepsilon, \tag{6}$$

equivalente a:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X, \ x < -\delta_\varepsilon \Longrightarrow f(x) < -\varepsilon$$

Simbolicamente, tale proprietà è espressa da:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

L'interpretazione geometrica della definizione 1 è la seguente:

Comunque prendiamo una retta orizzontale $r_\varepsilon : y = \varepsilon > 0$, esiste in corrispondenza un intorno di $+\infty$ i.e. un intervallo $(\delta_\varepsilon, +\infty)$ tale che i punti del grafico di f, cioè $P(x, f(x))$, giacciono al di sopra di r_ε per ogni $x \in (\delta_\varepsilon, +\infty)$. Più precisamente, appartengono alla regione $\mathcal{R}_\varepsilon = (\delta_\varepsilon, +\infty) \times (\varepsilon, +\infty)$ come illustrato in fig. 1

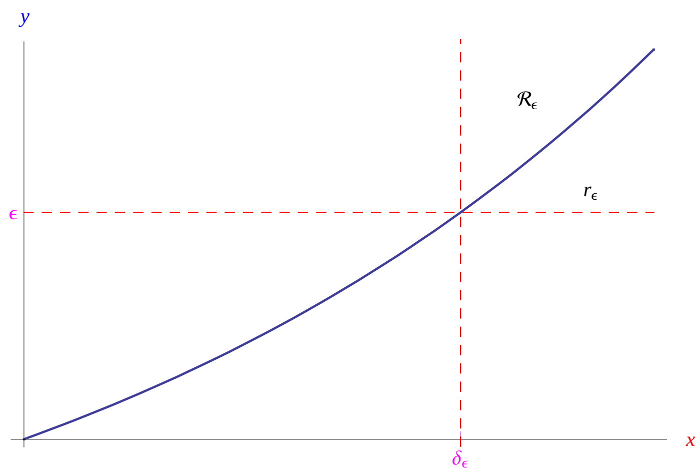

Figura 1: Interpretazione geometrica della definizione 1.