Esercizio di Analisi 1

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Esercizio 1 *Calcolare :*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{1+\cos x - \sin x}}$$

Soluzione

Per risolvere la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, eseguiamo il cambio di variabile $t = \frac{\pi}{2} - x$, per cui:

$$\cos 2x = \cos(\pi - 2t) = -\cos 2t, \quad \cos x = \sin t, \ \sin x = \cos t,$$

e il limite diventa:

$$\lambda = \lim_{t \to 0} \frac{1-\cos 2t}{1+\sin t - \cos t} \tag{1}$$

Scrivendo a numeratore $1 = \sin^2 t + \cos^2 t$:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{t \to 0} \frac{1-\cos 2t}{\sin^2 t + \cos^2 t + \sin t - \cos t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1-\cos 2t}{\sin t(\sin t + 1) + \cos t(\cos t - 1)} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1-\cos 2t}{2t} \cdot 2}{\frac{\sin t}{t}(\sin t + 1) - \cos t \cdot \frac{1-\cos t}{t}} \\ &= 2 \cdot \frac{\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos 2t}{2t}}{\underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{t \to 0}(\sin t + 1)}_{=1} - \underbrace{\lim_{t \to 0} \cos t}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{1-\cos t}{t}}_{=0}} \end{aligned} \tag{2}$$

Ovviamente

$$\lim_{t \to 0} \frac{1-\cos 2t}{2t} \underset{\tau = 2t}{=} \lim_{\tau \to 0} \frac{1-\cos \tau}{\tau} = 0,$$

onde

$$\lambda = 2 \frac{0}{1 \cdot 1 - 1 \cdot 0} = 0 \tag{3}$$

Alternativamente:

$$\lambda = \lim_{t \to 0} \frac{1-\cos 2t}{1+\sin t - \cos t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1-\cos 2t}{2t}}{\frac{\sin t}{2t} + \frac{1-\cos t}{2t}} = \frac{0}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0} = 0 \tag{4}$$