Esercizi di Analisi 1

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Esercizio 1 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x \to -\infty} x \left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{\pi}{2} \right)} \tag{1}$$

Soluzione

Calcoliamo preliminarmente

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \underbrace{\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{|x|}}_{=-1} \cdot \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}_{=1}, \tag{2}$$

onde

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = -1$$

Quindi

$$\lim_{x \to -\infty} x \left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{\pi}{2} \right) = (-\infty) \left[\underbrace{\arcsin(-1)}_{=-\pi/2} + \frac{\pi}{2} \right] = 0 \cdot \infty \tag{3}$$

Eseguiamo il cambio di variabile

$$t = \frac{1}{x} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0^- \tag{4}$$

per cui

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{1}{t}}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} = \frac{|t|}{t\sqrt{1+t^2}} \tag{5}$$

Osserviamo che per un assegnato $\Delta > 0$

$$\forall x \in (-\infty, -\Delta), \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \forall t \in (-\delta, 0),$$

essendo $\delta = 1/\Delta$. Ciò implica

$$\lambda = \lim_{t \to 0^-} \frac{\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) + \frac{\pi}{2}}{t} = \frac{0}{0} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{t \to 0^-} \frac{\frac{d}{dt}\left[\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) + \frac{\pi}{2}\right]}{\frac{d}{dt}(t)} \tag{6}$$

Calcoliamo a parte la derivata del numeratore che si riduce a

$$\frac{d}{dt} \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) \tag{7}$$

A tale scopo definiamo la variabile ausiliaria

$$\xi(t) = -\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

onde

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\arcsin\xi\left(t\right) &= \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{d}{dt}\xi\left(t\right) = \frac{\sqrt{1+t^2}}{|t|}\cdot(-1)\,\frac{d}{dt}\left(1+t^2\right)^{-1/2} \\ &= \frac{\sqrt{1+t^2}}{|t|}\left(1+t^2\right)^{-3/2} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{|t|}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1+t^2\right)^3}}\end{aligned} \tag{8}$$

Cio

$$\frac{d}{dt}\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) = \frac{t}{|t|\,(1+t^2)} \tag{9}$$

Pertanto

$$\lambda = \lim_{t\to 0^-}\frac{t}{|t|\,(1+t^2)} = \underbrace{\lim_{t\to 0^-}\frac{t}{|t|}}_{=-1}\cdot\underbrace{\lim_{t\to 0^-}\frac{1}{1+t^2}}_{=1} \tag{10}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{\pi}{2}\right) = -1 \tag{11}$$

ovvero la funzione converge a -1 per $x\to-\infty$, i.e. la retta $y+1=0$ è asintoto orizzontale a sinistra per il diagramma cartesiano della funzione.