Esercizi di Analisi 1

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Esercizio 1 *Calcolare*

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x-\arcsin x}} \tag{1}$$

Soluzione

Anche in questo caso si presenta la forma indeterminata 0/0:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x-\arcsin x}=\frac{0}{0} \tag{2}$$

Applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x-\arcsin x} &\overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{4x^3}{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = 4\lim_{x\to 0}\frac{x^3\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}-1}\\ &= 4\underbrace{\lim_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}}_{=1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}-1}\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte $\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}-1}$. A tale scopo razionalizziamo il denominatore:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}-1} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}-1}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{\sqrt{1-x^2}+1}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)}{1-x^2-1}\\ &= -4\lim_{x\to 0}x\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)=0\end{aligned} \tag{3}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x-\arcsin x}=0 \tag{4}$$