Appunti di Analisi 1

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

1 Interpretazione geometrica della regola di De L'Hospital

La *regola di De L'Hospital* è l'applicazione di due teoremi che richiedono la conoscenza della nozione di derivata, per cui in questa sezione ci limitiamo semplicemente ad enunciarla.

Siano date le funzioni

$$f : X_1 \to \mathbb{R}, \quad g : X_2 \to \mathbb{R}, \tag{1}$$

entrambe infinitesime o entrambe infinite in un punto x_0 di accumulazione per i rispettivi insiemi di definizione. Quindi il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ si presenta, per $x \to x_0$, in una delle forme indeterminate $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$. Se sono verificate le seguenti ipotesi:

1. $\exists I_\delta (x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \mid f, g$ sono derivabili in $I_\delta (x_0) - \{x_0\}$.
2. $g' (x) \neq 0, \ \forall x \in I_\delta (x_0) - \{x_0\}$
3. $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Allora:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f (x)}{g (x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f' (x)}{g' (x)} \tag{2}$$

Si noti che tale procedimento può essere iterato, cioè applicato al rapporto delle derivate, cosicché

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f' (x)}{g' (x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'' (x)}{g'' (x)} \tag{3}$$

Diamo ora un'interpretazione geometrica alla regola, considerando le seguenti funzioni:

$$f (x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{2}, \quad g (x) = \sqrt{x^2+3} - 2$$

La prima è definita per $x \geq 1$, mentre la seconda è definita su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre, esse sono continue nei rispettivi insiemi di definizione. In particolare nel punto $x_0 = 1$

$$\lim_{x \to 1} f (x) = f (1) = 0, \quad \lim_{x \to 1} g (x) = g (1) = 0$$

Ne segue che il rapporto $f (x) / g (x)$ si presenta ivi nella forma indeterminata $0/0$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f (x)}{g (x)} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3} - 2} = \frac{0}{0}$$

Applicando la regola

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3} - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Per dare un'interpretazione geometrica, fissiamo un intorno destro di $x_0 = 1$ di raggio δ, che denotiamo con $I_\delta^+(x_0)$. Quindi indichiamo con s la retta secante al grafico $\gamma : y = f(x)$ per i punti $(x_0, 0)$ e $P_0(x_0, f(x_0))$, come illustrato in fig. 1. Il coefficiente angolare di s è

$$m = \frac{f(x)}{x - x_0}$$

Segue (fig. 1)

$$\exists \xi \in (x_0, x) \mid \text{la tangente per } Q(\xi, f(\xi)) \text{ è parallela a } s$$

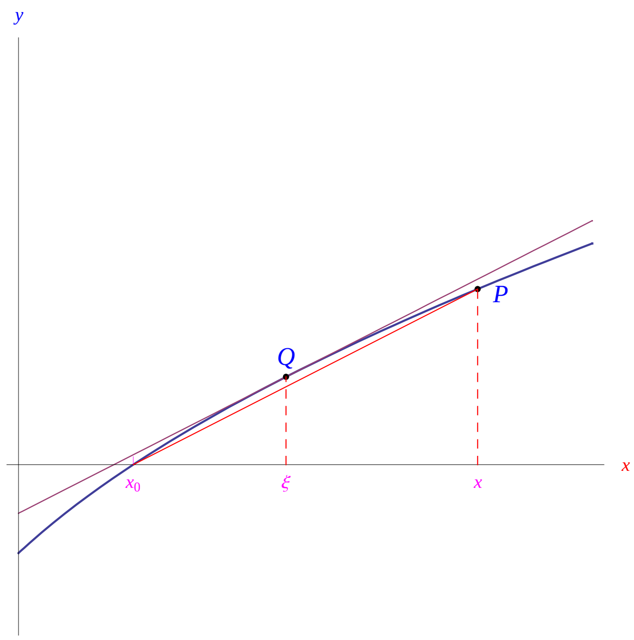

Figura 1: Intepretazione geometrica della regola di De L'Hospital.

Dal momento che il coefficiente angolare della retta tangente è la derivata prima calcolata in quel punto, dall'uguaglianza dei rispettivi coefficienti angolari (condizione di parallelismo) si ha:

$$\frac{f(x)}{x - x_0} = f'(\xi) \tag{4}$$

Ripetendo il procedimento per la funzione $g(x)$ si perviene (con ovvio significato dei simboli):

$$\frac{g(x)}{x - x_0} = g'(\xi'), \tag{5}$$

essendo $\xi' \in I_\delta^+(x_0)$. Dall'ipotesi 2 si ha che la derivata di $g(x)$ è priva di zeri in $I_\delta^+(x_0)$, per cui dalle (4)-(5)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi')}, \quad \forall x \in I_\delta^+(x_0) \tag{6}$$

Il comportamento $\xi, \xi' \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} x_0$ assieme alla (5) giustifica geometricamente la regola di De L'Hospital.