Esercizio di Analisi 1

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Esercizio 1 *Assegnate le funzioni*

$$f(x) = \frac{|\sin x|}{x}, \quad g(x) = \frac{\sin x}{|x|}, \tag{1}$$

studiare il comportamento di $f(x) - g(x)$ *in un intorno di* $x = 0$.

Soluzione

Le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ hanno in $x = 0$ una discontinuità di prima specie. Abbiamo già discusso la funzione $f(x)$ nell'esercizio precedente. In ogni caso, esplicitando il valore assoluto in un opportuno intorno di $x = 0$, si ha:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{se } x \in [0, \pi) \\ -\frac{\sin x}{x}, & \text{se } x \in (-\pi, 0] \end{cases} \tag{2}$$

Per la funzione $g(x)$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{se } x > 0 \\ -\frac{\sin x}{x}, & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

per cui

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = 1, \quad \lim_{x \to 0^-} g(x) = -1$$

Cioè f e g hanno lo stesso comportamento nel predetto intorno di $x = 0$, giacché

$$x \in [-\pi, \pi] \Longrightarrow f(x) = g(x)$$

Ne segue

$$x \in [-\pi, \pi] \Longrightarrow h(x) \stackrel{def}{=} f(x) - g(x) = 0$$

Quindi

$$\lim_{x \to 0} h(x) = 0$$

Conclusione: la funzione $h(x)$ è continua in $x = 0$.

Il diagramma cartesiano di $f(x) - g(x)$ nell'intervallo $[-6\pi, 6\pi]$ è riportato in fig. 1.

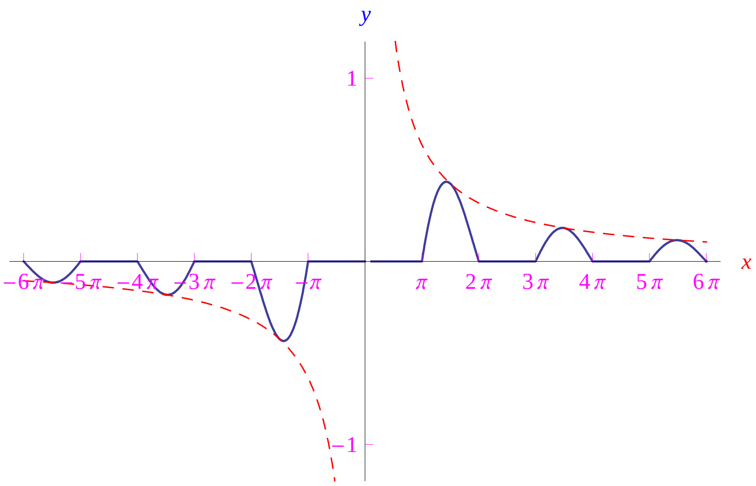

Figura 1: Diagramma cartesiano della funzione $\frac{|\sin x|}{x} - \frac{\sin x}{|x|}$.