Esercizio di Analisi 1

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Esercizio 1 *Classificare i punti di discontinuità della funzione:*

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}\right) \tag{1}$$

Soluzione

L'insieme di definizione della funzione è:

$$X = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0,\ x \neq x_k = \frac{1}{k\pi},\ \ \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}\right\}$$

Per determinare il limite per $x \to x_k$, eseguiamo il cambio di variabile $t = \sin\frac{1}{x}$, per cui:

$$\lim_{x\to x_k} x \sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\arcsin t} \sin\left(\frac{1}{t}\right)$$

Tale limite non esiste, per cui la funzione ha infiniti punti di discontinuità di seconda specie in $x_k = \frac{1}{k\pi},\ \ \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Più precisamente, in ogni intorno di x_k il grafico di f compie infinite oscillazioni che non si smorzano.

Denotiamo con S l'insieme di detti punti:

$$S = \left\{x_k = \frac{1}{k\pi}\right\}_{k\in\mathbb{Z}-\{0\}},$$

da cui vediamo che $x = 0$ è di accumulazione per S:

$$\forall I_\delta(0) = (-\delta, \delta),\ \ \exists x_k \in S \cap I_\delta(0) - \{0\}$$

Inoltre:

$$-x \leq f(x) \leq x,\ \ \forall x \in (-\delta, \delta)$$

Per il teorema dei carabinieri:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x = \lim_{x\to 0} (-x) = 0$$

Ne consegue che $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile. In fig. 1 è illustrato il grafico di f.

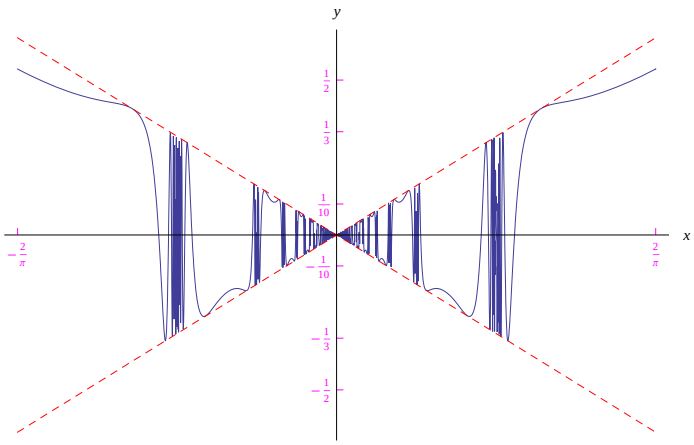

Figura 1: Grafico della funzione $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{\sin x}\right)$.