Esercizio di Analisi 1

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Esercizio 1 *Dimostrare*

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x^n\sin\frac{1}{x}\right)^\alpha-1}{x^{n-1}}=0,\quad \forall\alpha\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}-\{0,1\}}$$

Soluzione

Tenendo presente che

$$\lim_{x\to 0}\left(x^n\sin\frac{1}{x}\right)=0,\ \ \forall n\in\mathbb{N}-\{0,1\},$$

si ha che il limite proposto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Dividiamo numeratore e denominatore per $\sin\frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\left(1+x^n\sin\frac{1}{x}\right)^\alpha-1}{\sin\frac{1}{x}}}{\frac{x^{n-1}}{\sin\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{\left(1+x^n\sin\frac{1}{x}\right)^\alpha-1}{\sin\frac{1}{x}}}{x^n}\cdot x\sin\frac{1}{x}\right]=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x^n\sin\frac{1}{x}\right)^\alpha-1}{x^n\sin\frac{1}{x}}}_{\lambda_1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)}_{=0}$$

Per calcolare il limite λ_1 eseguiamo il cambio di variabile:

$$t=x^n\sin\frac{1}{x}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0,$$

onde

$$\lambda_1=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^\alpha-1}{t}$$

Rammentando il limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,$$

si ha $\lambda_1=\alpha$ e quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x^n\sin\frac{1}{x}\right)^\alpha-1}{x^{n-1}}=0$$

In fig. (1) riportiamo il grafico della funzione per assegnati valori di n,α.

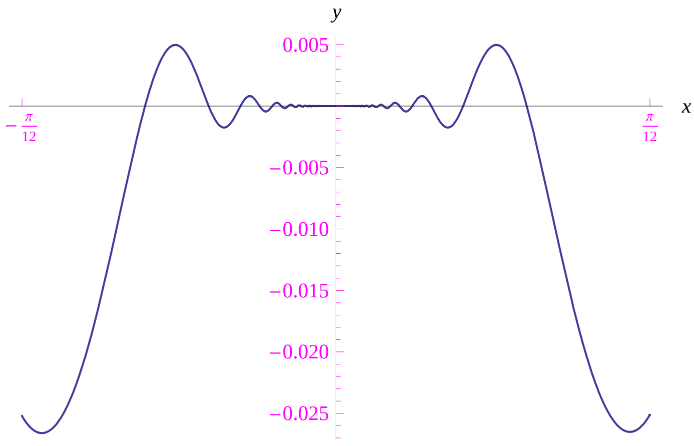

Figura 1: Grafico di $\frac{\left(1+x^n \sin\frac{1}{x}\right)^\alpha - 1}{x^{n-1}}$ per $(\alpha, n) = \left(\sqrt{5}, 4\right)$.